f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 3 + 3\,e^{-\frac{x}{3}}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1-a) Déterminer la fonction dérivée de f.

On sait $(e^u)' = u'.e^u$, d'où : $f(x) = x^2 - 3 + 3\,e^{-\frac{x}{3}} \Rightarrow f'(x) = 2x + 3\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\right) = 2x - e^{-\frac{x}{3}}$.

b) Etudier le sens de variation de f' et étudier la limite de f' en $+\infty$.

<u>*Variations de f'*</u> :

f' est définie, continue et dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

$f''(x) = [f'(x)]' = 2 + \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} > 0$ sur $[0\,;+\infty[$, puisqu'une exponentielle est toujours strictement positive.

La fonction f' est donc strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

<u>*Limite de f' en $+\infty$:*</u>

On sait $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{3}} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$.

On déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x - e^{-\frac{x}{3}}\right) = +\infty$ par addition. Par ailleurs, $f'(0) = 2\times0 - e^0 = -1$.

D'où le tableau de variation de f' :

x	0		α		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	|	$+$	
$f'(x)$	-1	↗	0	↗	$+\infty$

c) Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0{,}4 \le \alpha \le 0{,}5$.

f' est continue, strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, et telle que $f(0) = -1 < 0$ tandis que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty > 0$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire, la fonction f' passe une et une seule fois par l'ordonnée 0 , en un point d'abscisse $\alpha > 0$.

$$\left.\begin{cases} f'(0{,}4) = 0{,}8 - e^{-0{,}4/3} \approx -0{,}075 < 0 \\ f'(0{,}5) = 1 - e^{-0{,}5/3} \approx +0{,}153 > 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow 0{,}4 < \alpha < 0{,}5 .$$

d) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

f' étant continue, strictement croissante, le tableau de variation précédent montre que $\begin{cases} f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 \le x < \alpha \\ f'(\alpha) = 0 \\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \alpha \end{cases}$.

2-a) Etudier la limite de f en $+\infty$.

$$f(x) = x^2 - 3 + 3\,e^{-\frac{x}{3}} \text{ avec } \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - 3) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{3}} = 0 \end{array}\right\} \text{ d'où : } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ par addition.}$$

b) Déterminer le signe de $f(x) - (x^2 - 3)$ et sa limite en $+\infty$.

$E(x) = f(x) - (x^2 - 3) = 3\,e^{-\frac{x}{3}} > 0$, pour tout x réel.

De plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} E(x) = 3 \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{x}{3}} = 0$.

Interpréter géométriquement ces résultats. On note (P) la courbe d'équation $y = x^2 - 3$.

$E(x) = f(x) - (x^2 - 3) = 3\,e^{-\frac{x}{3}}$ mesure *l'écart algébrique* entre $P : y = x^2 - 3$ et $C : y = f(x)$.

Cet écart $E(x)$ tend vers 0 pour $x \to +\infty$, ce qui prouve que (C) se rapproche de plus en plus de (P) . On peut dire que la parabole (P) devient *asymptote* à la courbe (C) .

Comme $E(x) > 0$, on peut préciser que (C) reste en permanence au dessus de (P) .

3-a) Dresser le tableau de variation de f .

On exploite le signe de $f\,'(x)$ étudié au 1-d) .

x	0		α		$+\infty$
$f\,''(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$f(0) = 0$ et $f\,'(0) = -1$.

Si d'après 1-c) on pose $\alpha = 0{,}45$, on obtient $f(\alpha) \approx f(0{,}45) = -3{,}66$.

b) Prouver que $f(x) = 0$ admet une solution non nulle unique β , appartenant à l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$.

On utilise à nouveau le théorème de la valeur intermédiaire :

$$\left\{ \begin{array}{c} f \text{ est continue, strictement croissante sur } [\alpha\,,+\infty[\\ f(\alpha) < 0 \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) > 0 \end{array} \right\} \text{ donc , il existe } \beta \text{ unique sur } [\alpha\,;+\infty[\text{ tel que } f(\beta) = 0 .$$

Montrer que $0{,}8 \le \beta \le 0{,}9$.

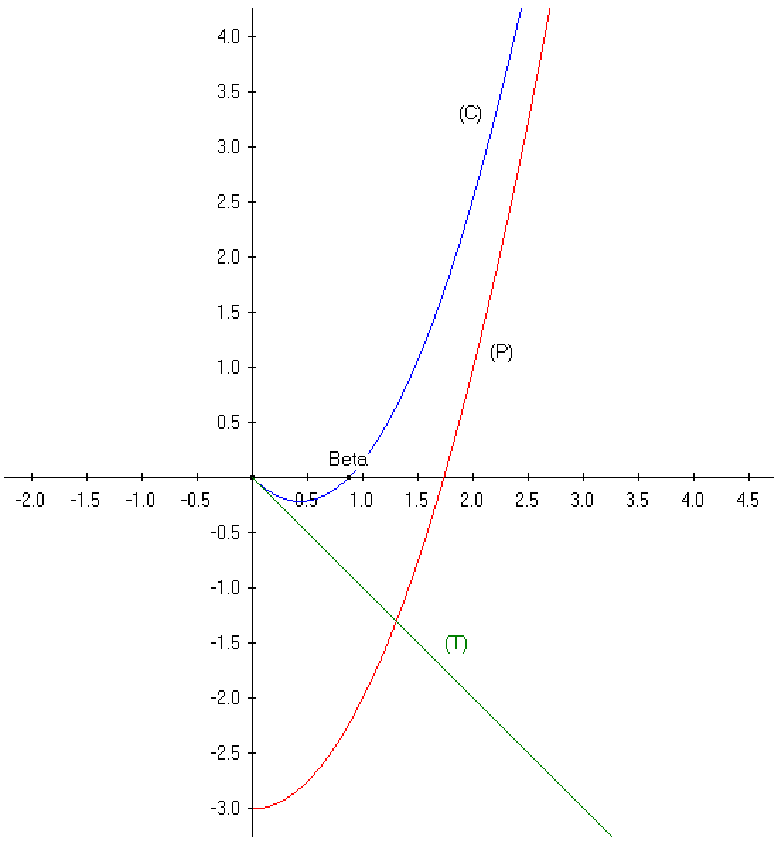
$$\left\{ \begin{array}{l} f(0{,}8) \approx 0{,}062 < 0 \\ f(0{,}9) \approx +0{,}032 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0{,}8 < \beta < 0{,}9$$, puisque le changement de signe se produit entre ces deux bornes.

c) Etudier le signe de $f(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

x	0		α		β		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	0	↗	$+\infty$
Signe de f(x)	0	$-$	$-3{,}66$	$-$	0	$+$	$+\infty$

On voit que $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \\ 0 < x < \beta \Leftrightarrow f(x) < 0 \\ x = \beta \Rightarrow f(\beta) = 0 \\ x > \beta \Leftrightarrow f(x) > 0 \end{array} \right.$.

4/ Tracer les courbes (*P*) et (*C*) .



Préciser la tangente à (*C*) au point d'abscisse 0 .

$T_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ avec $f'(0) = -1$ et $f(0) = 0$.

D'où $T_0 :\ y = -x$.