n désigne un entier naturel non nul.

On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^{-nx^2}$ et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1/ Dresser le tableau de variation de f_n.

* f_n est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

* La fonction f_n est *paire* , ce qui permet de limiter l'étude à l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

En effet : $f_n(-x) = e^{-n(-x)^2} = e^{-nx^2} = f_n(x)$, pour tout x réel. La courbe (C_n) est symétrique par rapport à l'axe vertical des ordonnées, $x = 0$.

* $f_n(0) = e^0 = 1$.

* Si $x \to +\infty$ alors $-nx^2 \to -\infty$, d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-nx^2} = 0$.

La courbe (C_n) admet pour asymptote horizontale l'axe des abscisses $y = 0$.

* $f = e^u \Rightarrow f' = u'.e^u$, d'où : $f'_n(x) = -2nx.\,e^{-nx^2} = -2n.x.f_n(x)$. (1)

On constate que $f'_n(x)$ est du signe opposé à celui de x , d'où le tableau suivant sur $[0\ ;+\infty[$, ensuite symétrisé pour le compléter sur $]-\infty\ ;0]$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	↗	1	↘	0

2-a) Montrer que la dérivée seconde de f_n s'annule pour deux valeurs opposées a_n et b_n.

$f_n''(x) = (f_n'(x))' = -2n\left(x.\ e^{-nx^2}\right)'$ donc on dérive une forme $u.v$ de dérivée $u'.v + u.v'$.

$f_n''(x) = -2n(1.\ e^{-nx^2} + x.(-2n.x.\ e^{-nx^2})) = -2n(1 - 2n.x^2)\,e^{-nx^2}$.

$f_n''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2n.x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{2n} > 0 \Leftrightarrow a_n = -\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ et $b_n = +\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ (abscisses des points d'inflexion).

b) On note A_n et B_n les points de (C_n) d'abscisses respectives a_n et b_n.

Démontrer que lorsque n varie dans $\mathbb{N}^*$, les points A_n et B_n restent sur une même droite.

Cherchons l'ordonnée des points A_n et B_n , sachant que la parité de f_n assure qu'elle soit identique pour ces deux points d'abscisses opposées.

$f_n(a_n) = f_n(b_n) = f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right) = e^{-n\times\frac{1}{2n}} = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, ordonnée constante, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble des points A_n et B_n sont situés sur la droite horizontale d'ordonnée $y = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Démontrer que lorsque n varie dans $\mathbb{N}^*$, les tangentes en A_n et B_n à la courbe (C_n) passent par un point fixe. Préciser les coordonnées de ce point.

$T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$, d'où : $T_{a_n} : y = f_n'(a_n)(x - a_n) + f_n(a_n) \Leftrightarrow y = f_n'(a_n).x + [f_n(a_n) - a_n.f_n'(a_n)]$.

On reporte : $a_n = -\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$, $f_n(a_n) = e^{-\frac{1}{2}}$ et, comme vu en (1) : $f_n'(a_n) = -2n.a_n.f_n(a_n) = \dfrac{2n}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2n}.\,e^{-\frac{1}{2}}$.

On déduit : T_{a_n} : $y = \sqrt{2n}.e^{-\frac{1}{2}}.x + \left[e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\sqrt{2n}.e^{-\frac{1}{2}}\right)\right]$

T_{a_n} : $y = \sqrt{2n}.e^{-\frac{1}{2}}.x + 2.e^{-\frac{1}{2}}$, qui est bien de la forme $y = Ax + B$ avec $A = \sqrt{2n}.e^{-\frac{1}{2}}$ et $B = 2.\ e^{-\frac{1}{2}}$.

De même : $b_n = +\frac{1}{\sqrt{2n}}$, $f_n(b_n) = e^{-\frac{1}{2}}$ et, comme vu en (1) : $f_n'(b_n) = -2n.b_n.f_n(b_n) = \frac{2n}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2n}.e^{-\frac{1}{2}}$.

On obtient : T_{b_n} : $y = -\sqrt{2n}.e^{-\frac{1}{2}}.x + 2.e^{-\frac{1}{2}}$.

On constate que ces deux tangentes se coupent en $x = 0$, $y = 2e^{-\frac{1}{2}}$, soit $E\,(0\,;\,2e^{-\frac{1}{2}})$.

3/ Tracer les courbes (C_1) et (C_3) . Placer les points A_1 , B_1 , A_3 et B_3 et les tangentes respectives.

$A_1(-\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{e}})$ et $B_1(\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{e}})$ avec $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$ et $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}607$.

$A_3(-\frac{1}{\sqrt{6}} ; \frac{1}{\sqrt{e}})$ et $B_3(\frac{1}{\sqrt{6}} ; \frac{1}{\sqrt{e}})$ avec $\frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0{,}408$.