Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $e^{2x} + 3e^{x} - 4 = 0$

$X = e^x \Rightarrow X^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$.

L'équation devient $X^2 + 3X - 4 = 0$, dont les racines sont $X_1 = +1$ et $X_2 = -4$.

$X_1 = +1 \Leftrightarrow e^x = 1$; soit $x = 0$.

$X_2 = -4 \Leftrightarrow e^x = -4$, impossible puisqu'une exponentielle est toujours strictement positive.

D'où : $S = \{0\}$.

b) $e^{x} + 3 \le 4e^{-x}$

$e^x + 3 \le 4e^{-x} \Leftrightarrow e^x + 3 \le \dfrac{4}{e^x}$. On multiplie les deux membres par $e^x > 0$, ce qui conserve le sens de l'inéquation :

$e^{2x} + 3e^x \le 4 \Leftrightarrow e^{2x} + 3e^x - 4 \le 0$.

$X = e^x \Rightarrow X^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$.

L'inéquation devient $X^2 + 3X - 4 \le 0$, dont les racines sont $X_1 = +1$ et $X_2 = -4$.

$X^2 + 3X - 4 \le 0 \Leftrightarrow -4 \le X \le +1$, soit : $-4 \le e^x \le +1$ qui se résume à $e^x \le +1 \Leftrightarrow e^x \le e^0$.

La fonction exponentielle est *continue* , *strictement croissante*, d'où : $e^a \le e^b \Leftrightarrow a \le b$.

On déduit : $x \le 0$, soit $S =]-\infty ; 0]$.

c) $e^{3x} + 1 = 0$

Une exponentielle étant toujours strictement positive, on déduit $e^{3x} + 1 > 1$.

L'équation ne peut admettre de solution, soit : $S = \varnothing$.

d) $e^{-x^2+x} \le 1$

$e^{-x^2+x} \le 1 \Leftrightarrow e^{-x^2+x} \le e^0$.

La fonction exponentielle est *continue* , *strictement croissante*, d'où : $e^a \le e^b \Leftrightarrow a \le b$.

On déduit : $-x^2 + x \le 0 \Leftrightarrow -x(x-1) \le 0$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-x(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty ; 0] \cup [+1 ; +\infty[$.