On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par : $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

1/ Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

$\left\{\begin{matrix} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u_1 = 64$, $u_2 = 314$, $u_3 = 1564$, $u_4 = 7814$.

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

On conjecture : $\begin{cases} \text{Si } n \text{ impair , } u_n \text{ se termine par } 64 \\ \text{Si } n \text{ pair , } u_n \text{ se termine par } 14 \end{cases}$.

2/ Montrer que, pour tout n entier naturel, on a : $u_{n+2} \equiv u_n$ (modulo 4) .

$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 \Rightarrow u_{n+2} = 25u_n - 36 \Rightarrow u_{n+2} - u_n = 4(6u_n - 9) = 4k$, $k \in \mathbb{N}$.

$u_{n+2} = u_n + 4k \Rightarrow u_{n+2} \equiv u_n\ [4]$.

En déduire que, pour tout k entier naturel, on a : $u_{2k} \equiv 2$ (modulo 4) et $u_{2k+1} \equiv 0$ (modulo 4) .

$u_{2k} \equiv u_0\ [4]$ et $u_0 = 14 \equiv 2[4] \Rightarrow u_{2k} \equiv 2[4]$.

$u_{2k+1} \equiv u_1\ [4]$ et $u_1 = 64 \equiv 0[4] \Rightarrow u_{2k+1} \equiv 0[4]$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, on a : $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

Soit la proposition de récurrence P_n : " $2u_n = 5^{n+2} + 3$".

- (*Initialisation*) P_0 est vraie , puisque : $2u_0 = 28 = 25 + 3 = 5^2 + 3$.

- (*Héritage*) Soit P_n vraie $(2u_n = 5^{n+2} + 3)$. Peut-on en déduire P_{n+1} vraie $(2u_{n+1} = 5^{(n+1)+2} + 3)$?

$2u_{n+1} = 2(5u_n - 6) = 5(2u_n) - 12 = 5(5^{n+2} + 3) - 12 = 5^{n+3} + 3 = 5^{(n+1)+2} + 3$.

- (*Conclusion*) P_{n+1} est vraie sous réserves que P_n qui la précède le soit. Comme P_0 l'est, on déduit : P_n vraie pour tout entier naturel n.

b) En déduire que, pour tout n entier naturel, on a : $2u_n \equiv 28$ (modulo 100) .

On a vu $\left\{\begin{matrix} u_{2k} \equiv 2[4] \text{ , soit } 2u_{2k} \equiv 0[4] \\ u_{2k+1} \equiv 0[4] \Rightarrow 2u_{2k+1} \equiv 0[4] \end{matrix}\right\}$ d'où : $2u_n \equiv 0[4]$ (a)

$2u_n = 5^{n+2} + 3 = 25\times5^n + 3 = 25k + 3 \Rightarrow 2u_n \equiv k + 3\ [4]$, ce qui impose $k = 4p + 1$ d'après (a).

En conséquence :

$2u_n = 25(4p + 1) + 3 = 100p + 28 \Rightarrow 2u_n \equiv 28[100]$.

3/ Déterminer suivant les valeurs de n les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n .

$2u_n = 100p + 28 \Rightarrow u_n = 50p + 14 = 14[50]$, ce qui prouve que les 2 derniers chiffres sont 14 ou 64 .

Soit N le nombre formé par ces deux derniers chiffres ($N = 14$ ou $N = 64$)

Plus précisément :

Posons $u_n = k \times 1000 + N$.

$100 \equiv 0[4] \Rightarrow u_n \equiv N[4]$, soit $\begin{cases} u_n \equiv 2[4] \text{ pour } N = 14 \\ u_n \equiv 0[4] \text{ pour } N = 64 \end{cases}$.

Comme $\left\{\begin{matrix} u_{2k} \equiv 2[4] \\ u_{2k+1} \equiv 0[4] \end{matrix}\right\}$ on déduit $\begin{cases} u_{2k} \text{ se termine par } 14 \\ u_{2k+1} \text{ se termine par } 64 \end{cases}$.

4/ Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

$u_{n+1} = 5u_n - 6 \Rightarrow u_{n+1} - 5u_n = 6$.

Tout diviseur de $(u_n; u_{n+1})$ est donc diviseur de 6 , soit 1,2,3 ou 6 .

On peut donc affirmer que PGCD$(u_n ; u_{n+1})$ est l'un de ces nombres.

On sait que $\left\{ \begin{array}{c} u_{2k} \equiv 2[4] \\ u_{2k+1} \equiv 0[4] \end{array} \right\}$ d'où $\left\{ \begin{array}{l} u_{2k} = 4p + 2 \\ u_{2k+1} = 4p' \end{array} \right.$.

Ceci prouve que 2 est un diviseur commun de $(u_n ; u_{n+1})$.

Il reste à savoir si 3 est également diviseur commun de $(u_n ; u_{n+1})$.

Supposons $u_n \equiv 0[3]$:

En conséquence : $2u_n \equiv 0[3] \Rightarrow 5^{n+2} + 3 \equiv 0[3] \Rightarrow 5^{n+2} \equiv 0[3]$.

Comme 5 est un nombre premier, lui comme aucune des puissances entières de 5 ne peut être divisible par 3 .

On conclue : PGCD $(u_n ; u_{n+1}) = 2$.