Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

On sait que $f(x) = x^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, admet pour primitives $F_k(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$.

(On remarquera le cas particulier $x = 1 = x^0$ qui admet pour primitives $\dfrac{x^1}{1} + k = x + k$.

Par ailleurs :

$f = u + v \Rightarrow F = U + V$ où U et V sont les primitives respectives de u et v .

$f = \lambda u$, avec λ constante réelle $\Rightarrow F = \lambda U$.

En conséquence :

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 2 \Rightarrow F_k(x) = \frac{x^5}{5} - 5\left(\frac{x^4}{4}\right) + 3\left(\frac{x^3}{3}\right) - 4\left(\frac{x^2}{2}\right) + 2x + k = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x + k.$$

b) $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

On sait que $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$, donc : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ admet $F_k(x) = -\dfrac{1}{x} + k$ pour primitives.

Donc : $f(x) = \dfrac{3}{x^2} \Rightarrow F_k(x) = -\dfrac{3}{x} + k$.

Autre Méthode : Exposants fractionnaires

La formule $f(x) = x^n \Rightarrow F_k(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$ se généralise aux entiers négatifs et même aux exposants fractionnaires.

Ainsi : $f(x) = \dfrac{3}{x^2} = 3x^{-2} \Rightarrow F_k(x) = 3\left(\dfrac{x^{-1}}{-1}\right) + k = -3x^{-1} + k = -\dfrac{3}{x} + k$.

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow F_k(x) = x + \dfrac{1}{x} + k.$

d) $f(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

$f(x) = -\dfrac{2}{x^3} = -2(x^{-3}) \Rightarrow F_k(x) = -2\left(\dfrac{x^{-2}}{-2}\right) + k = x^{-2} + k = \dfrac{1}{x^2} + k$.

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

On sait que $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ admet $F_k(x) = 2\sqrt{x} + k$ pour primitives.

$f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow F_k(x) = -\dfrac{1}{x} + 4\sqrt{x} + k$.