**La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ .**

**1/ Justifier que $f$ est périodique de période $2\pi$ . Etudier la parité de $f$ .**

On prouve : $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout réel $x$ .

$f(x + 2\pi) = 2 \sin (x + 2\pi) + \sin [2(x + 2\pi)] = 2 \sin (x + 2\pi) + \sin (2x + 4\pi)$ .

On sait que la fonction $\sin x$ est périodique de période $2\pi$ , d'où $\begin{cases} \sin (x + 2\pi) = \sin x \\ \sin (2x + 4\pi) = \sin 2x \end{cases}$ .

On déduit : $f(x + 2\pi) = 2 \sin x + \sin (2x) = f(x)$ , pour tout $x$ réel.

La fonction $f$ admet $T = 2\pi$ pour période, mais pourrait admettre une période sous multiple de $2\pi$ , ce qui n'est d'ailleurs pas le cas.

*Parité de $f$* : (*Remarque* : Que l'on doive conclure que la fonction est *paire* ou *impaire*, on dit que l'on étudie la parité de $f$)

$f(-x) = 2 \sin (-x) + \sin (-2x) = -2 \sin x - \sin 2x$ , car la fonction sinus est *impaire*, soit $\sin (-a) = -\sin a$ , $\forall a \in \mathbb{R}$ .

Une fonction impaire admet une courbe représentative symétrique par rapport à l'origine $O$ .

**En déduire qu'il suffit d'étudier la fonction $f$ sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ .**

La période $T = 2\pi$ de $f$ , donc sa *répétitivité* , permet de limiter son étude à un intervalle de largeur $2\pi$ , par exemple $[0 ; 2\pi[$ .

Pour exploiter le fait que $f$ est impaire, il est plus judicieux de choisir $]-\pi ; \pi]$ , intervalle de largeur $2\pi$ , symétrique par rapport à l'origine.

$f$ est impaire, donc la symétrie de sa représentation graphique par rapport à l'origine permet de limiter l'étude à l'intervalle $[0 ; \pi]$ .

Le graphique obtenu sera symétrisé par rapport à l'origine, ce qui donnera sa représentation sur $[-\pi ; \pi]$ soit une période de largeur $2\pi$ , qu'il suffira ensuite de reproduire de période en période.

**2/ Démontrer que, pour tout réel $x$ , on a $f'(x) = 2(2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$ .**

On sait que $(\sin x)' = \cos x$ et que $(\sin u)' = u'.\cos u$ , d'où : $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x \Rightarrow f'(x) = 2 \cos x + 2 \cos 2x$ .

On sait également que $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$ .

On utilise $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ , d'où : $f'(x) = 2 \cos x + 4 \cos^2 x - 2$ , soit $f'(x) = 4 \cos^2 x + 2 \cos x - 2$ .

En développant le résultat proposé, on obtient ce même résultat :

$2(2 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 2(2 \cos^2 x + 2 \cos x - \cos x - 1) = 4 \cos^2 x + 2 \cos x - 2$ .

D'où le résultat attendu.

**3/ Etudier les variations de $f$ sur $[0 ; \pi]$ .**

La fonction $f$ est définie, continue et dérivable sur $[0 ; \pi]$ , comme somme de fonctions définies, continues et dérivables sur cet intervalle.

- *Valeurs aux bornes* : $f(0) = 0$ et $f(\pi) = 0$ .

- *Extremum* : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} \\ \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi \end{array} \right\}$ .

Par ailleurs :

$f(\frac{\pi}{3}) = 2 \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = 2 \sin\frac{\pi}{3} + \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = 2 \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} = 3 \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

$f(\pi) = 2 \sin\pi + \sin 2\pi = 0$ .

Les extremums (extrema) ont pour coordonnées $E(\frac{\pi}{3} ; \frac{3\sqrt{3}}{2})$ et $F(\pi ; 0)$ .

- *Signe de la dérivée* : Comme $\cos x + 1 \geq 0$ sur $[0 ; \pi]$ , puisque $\cos x \geq -1$ , le signe de $f'(x)$ dépend uniquement de celui du terme $2 \cos x - 1$ .

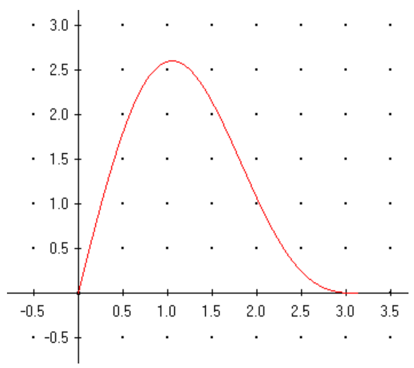
En se référant au cercle trigonométrique, on constate $\begin{cases} 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2\cos x - 1 > 0 \\ \frac{\pi}{3} < x \leq \pi \Rightarrow \cos x < \frac{1}{2} \Rightarrow 2\cos x - 1 < 0 \end{cases}$ .

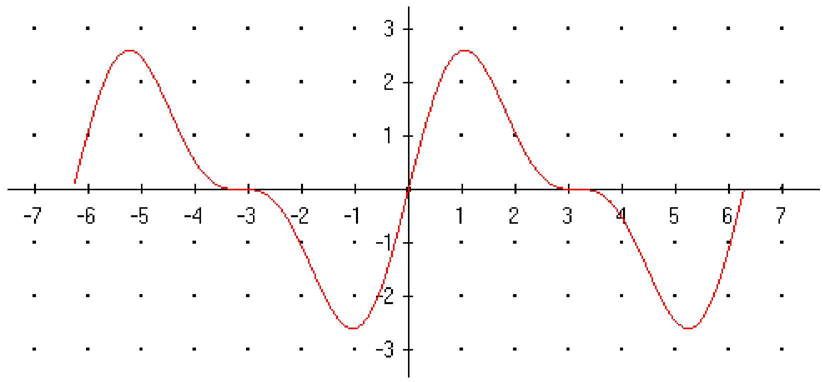
D'où : $f'(x)$ est positive sur $[0 ; \frac{\pi}{3}[$ et négative sur $]\frac{\pi}{3} ; \pi]$ . *Remarque* : $f'(0) = 4$ .

- *Tableau de variation* :

| $x$ | $0$ | | $\pi/3$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $4$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | ↘ | $0$ |

**4/ Représenter graphiquement $f$ sur $[0 ; \pi]$ puis sur $[-2\pi ; 2\pi]$ .**




On a symétrisé par rapport à l'origine, puis décalé le dessin initial de $-2\pi$ , et celui symétrisé de $+2\pi$ .

On remarquera les *points d'inflexion* à pente nulle en $x = -\pi$ et $x = \pi$ .