Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ définie sur] 1 ; +∞ [.

a) Montrer que la droite (*D*) $y = x + 2$ est asymptote oblique à (*C*) courbe représentative de *f* .

Etudions le comportement de *l'écart vertical algébrique* $E(x) = f(x) - (x + 2)$ entre la droite $y = x + 2$ et la courbe représentative de f .

$$E(x) = f(x) - (x + 2) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} - (x + 2) = \frac{x^2 + x - 1 - (x + 2)(x - 1)}{x - 1} = \frac{x^2 + x - 1 - x^2 - 2x + x + 2}{x - 1},$$

$$E(x) = f(x) - (x + 2) = \frac{1}{x - 1} \text{ d'où : } \lim_{x \to +\infty} E(x) = 0 .$$

La droite (*D*) : $y = x + 2$ est bien asymptote oblique à la courbe (*C*) .

b) Etudier les positions relatives de (*C*) et (*D*) .

$E(x) = f(x) - (x + 2) = \dfrac{1}{x - 1} > 0$ lorsque $x > 1$, donc la courbe (*C*) est partout au dessus de (*D*) , l'écart entre ces deux courbes tendant vers 0 lorsque x devient infini.

c) Déterminer le nombre d'unités d'aires du domaine plan situé entre (*C*) , (*D*) et les droites verticales d'abscisses $x = 2$ et $x = 5$.

(*C*) étant au dessus de (*D*) sur l'intervalle [2 ; 5] , on déduit : $A = \int_2^5 [f(x) - (x + 2)]\, dx = \int_2^5 \dfrac{1}{x - 1}\, dx$.

$\ln |x - 1| = \ln |u|$ est une primitive de $\dfrac{1}{x - 1}$ qui est de forme $\dfrac{u'}{u}$.

Comme $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$, on déduit : $A = \int_2^5 \dfrac{1}{x - 1}\, dx = \left[\ln (x - 1)\right]_2^5 = \ln 4 - \ln 1 = 2 \ln 2$ unités d'aire.