Un dé bien équilibré est lancé 5 fois.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois le '6' ?

On dénombre $n = 5$ expériences *identiques* , chacune d'entre elles consistant à lancer un dé à six faces équiprobables, le '6' ayant donc une probabilité $p = \frac{1}{6}$ de sortir.

Chaque lancer a deux issues, A et $\overline{A}$, selon que la face obtenue est un '6' ou non.

$p(A) = p = \frac{1}{6}$ et $p(\overline{A}) = 1 - p = \frac{5}{6}$.

La variable aléatoire X qui mesure le nombre de '6' obtenus en 5 lancers suit une *loi de Bernoulli*, dite aussi *loi Binomiale*.

La probabilité de réaliser A exactement k fois $(0 \leq k \leq n)$ est : $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

D'où : $p(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5!}{3!\ 2!} \times \frac{5^2}{6^5} = 10 \times \frac{5^2}{6^5}$, soit $p(X = 3) = 0{,}032$ (3,2%) .

b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le '6' ?

Soit B l'évènement " obtenir au moins une fois le '6' ".

Son évènement contraire $\overline{B}$ est " ne jamais obtenir le '6' " .

$p(\overline{B}) = p(X = 0) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \left(\frac{5}{6}\right)^5$.

$p(B) = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0{,}598$ (59,8%) .

c) Soit X la variable aléatoire qui mesure le nombre de '6' obtenus en 5 lancers.
Quelle est l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X ?

L'espérance mathématique de la loi binomiale $X = B(n , p)$, n expériences identiques, avec p probabilité de réaliser l'évènement A au cours de chaque expérience, est : $E(X) = n \times p = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$.

Cela signifie qu'en 5 lancers, on peut espérer en moyenne 0,83 '6'.
Il faut comprendre ce résultat dans le cadre de la "loi des grands nombres" : En 500 lancers du dé, on obtiendra environ 83 fois le '6' .