Soit la suite (u_n) telle que $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1$.

a) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier les réponses.

Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si : $u_{n+1} = u_n + r$ (r raison constante).

La présence de $\frac{1}{2}$ devant u_n laisse penser qu'elle n'est pas arithmétique.

Vérification par un contre exemple :

$u_1 = 0$, $u_2 = \frac{1}{2} u_1 + 1 = 1$, $u_3 = \frac{1}{2} u_2 + 1 = \frac{3}{2}$.

$u_2 - u_1 = 1$ et $u_3 - u_2 = \frac{1}{2}$, la raison r n'est donc pas une constante, ce qui confirme que la suite n'est pas arithmétique.

Une suite (u_n) est géométrique si et seulement si : $u_{n+1} = q \times u_n$ ($q \neq 0$, raison constante).

La présence de $+1$ derrière $\frac{1}{2} u_n$ laisse penser qu'elle n'est pas géométrique.

Vérification par un contre exemple :

$u_1 = 0$, $u_2 = \frac{1}{2} u_1 + 1 = 1$, $u_3 = \frac{1}{2} u_2 + 1 = \frac{3}{2}$, $u_4 = \frac{1}{2} u_3 + 1 = \frac{7}{4}$.

$\frac{u_2}{u_1}$ impossible à calculer . Essayons les termes suivants : $\frac{u_3}{u_2} = \frac{3}{2}$ et $\frac{u_4}{u_3} = \frac{7}{6}$.

La raison q n'est donc pas une constante, ce qui confirme que la suite n'est pas géométrique.

b) Déterminer le réel α tel que $u_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2} (u_n - \alpha)$.

Ramenons cette expression à la forme $u_{n+1} = au_n + b$.

$u_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2} (u_n - \alpha) \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{\alpha}{2}$.

On *identifie* cette écriture à celle de l'énoncé : $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1$, ce qui impose : $\frac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

En conséquence : $u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2} (u_n - 2)$ pour tout entier n non nul.

c) Soit la suite (v_n) telle que $v_n = u_n - \alpha$. Montrer que (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

On pose : $v_n = u_n - 2$, d'où : $u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2} (u_n - 2) \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ pour tout entier n non nul.

La suite (v_n) est *géométrique* , de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1^{er} terme $v_1 = u_1 - 2 = -2$.

d) En déduire l'écriture de v_n et u_n en fonction de n .

(v_n) géométrique $\Rightarrow v_n = v_1 q^{n-1}$, soit : $v_n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout n entier non nul.

Par ailleurs : $v_n = u_n - 2 \Leftrightarrow u_n = v_n + 2$, soit : $v_n = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout n entier non nul.

Calculer leurs limites lorsque n devient infini.

On sait que si la raison q d'une suite géométrique vérifie $|q| < 1$ ($-1 < q < +1$) , alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

$q = \frac{1}{2}$ vérifie cette propriété, donc la suite (v_n) converge vers 0 .

Sachant : $u_n = v_n + 2$, on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \left(\lim\limits_{n \to +\infty} v_n\right) + 2 = 2$.

La suite (u_n) converge vers 2 .