Solution – Fonction Exponentielle – Logarithme – Continuité – Dérivabilité – s3795

Soit l'application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = x^2 \ln x \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

1-a) Etudier la continuité de f en zéro.

- Soit $g(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$, fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, comme produit et composée de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

- Soit $h(x) = x^2 \ln x$, fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^* =]0 \,;\, +\infty[$, comme produit et composée de fonctions définies, continues et dérivables sur $]0 \,;\, +\infty[$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} g(x) \text{ avec } \left\{ \begin{array}{c} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \end{array} \right\} \text{ forme indéterminée } \infty \times 0 .$$

Posons $X = \dfrac{1}{x}$: $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X \to -\infty} X^2 e^X = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x$, forme indéterminée $0 \times \infty$, mais on sait : $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

La fonction f est continue en 0 .

b) Etudier la dérivabilité de f en zéro.

La continuité en 0 est établie ; on peut étudier la dérivabilité en 0 , la continuité en ce point en étant un préalable.

Pente à gauche : $f'_g(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} = 0$ (même méthode que précédemment pour $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$).

Pente à droite : $f'_d(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$.

On conclue : $f'_g(0) = f'_d(0) = 0$. La fonction f est dérivable en $x = 0$.

Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

La courbe représentative de f présente une *tangente horizontale* en $x = 0$.