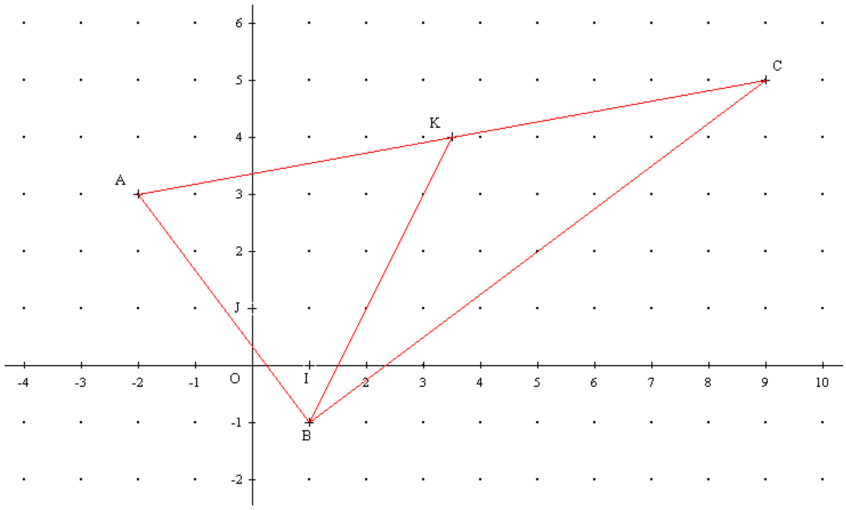
1/ Construire un repère orthonormé (*O* ; *I* , *J*) puis placer dans ce repère les points suivants :

$A(-2 ; 3)$ $\quad$ $B(1 ; -1)$ $\quad$ $C(9 ; 5)$ $\quad$ $K(\frac{7}{2} ; 4)$.



2/ On admettra dans toute la suite du problème que $BC = 10$ et $AC = 5\sqrt{5}$.

a) Montrer que $AB = 5$.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{[1 - (-2)]^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

b) Démontrer que le triangle *ABC* est rectangle.

Si le triangle *ABC* est rectangle, son angle droit sera en *B* .

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, il suffit de vérifier : $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

$AB^2 + BC^2 = 5^2 + 10^2 = 25 + 100 = 125$ et $AC^2 = (5\sqrt{5})^2 = 25\times(\sqrt{5})^2 = 25\times5 = 125$.

Le triangle *ABC* est bien rectangle en *B* .

c) Démontrer que *K* est le milieu de [*AC*] .

K milieu de $[AC]$ $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-2 + 9}{2} = \dfrac{7}{2} \\ y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{3 + 5}{2} = 4 \end{array} \right\}$, ce qui est vérifié.

d) Déduire des questions précédentes que $KC = KB$.

Méthode directe :

Dans un triangle rectangle, la *médiane* relative à *l'hypoténuse* est égale à la moitié de l'hypoténuse, soit :

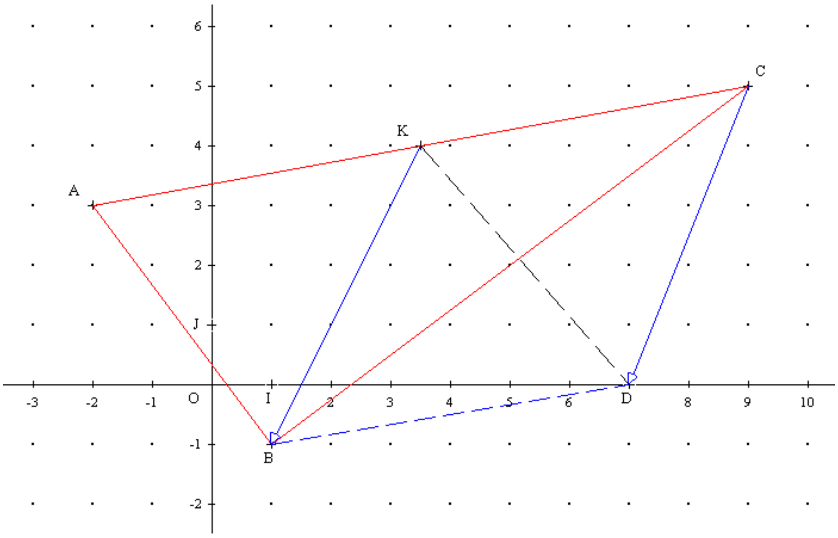
$KB = \dfrac{AC}{2} = KA = KC$.

Méthode détaillée :

Un triangle rectangle est la moitié d'un rectangle, donc en plaçant le point *B'* , symétrique de *B* par rapport à *K*, on obtient le rectangle *AB'CB* , dont les diagonales [*AC*] et [*BB'*] se coupent en un même milieu *K* , car c'est un *parallélogramme* , et dont les diagonales sont égales, car c'est un *rectangle*.

On déduit : $KB' = KB = KA = KC$.

3-a) Dans le repère initial, placer le point D image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{KB}$.



b) Démontrer que le quadrilatère *KCDB* est un losange.

La translation précédente entraîne $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{KB}$.

Le quadrilatère $KCDB$ possède donc *deux côtés opposés simultanément parallèles et égaux,* ce qui fait qu'il est un parallélogramme.

Pour qu'un parallélogramme soit un *losange* , il faut et il suffit qu'il possède *deux côtés consécutifs égaux* .

Or, nous avons montré au 2-d) que $KB = KC$, donc $KCDB$ est un losange.

c) Démontrer que les droites (*KD*) et (*AB*) sont parallèles.

Les diagonales d'un losange sont *perpendiculaires* , soit (KD) *perpendiculaire* à (BC) .

Sachant le triangle ABC rectangle en B , la droite (AB) est également perpendiculaire à (BC) .

Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles. On déduit donc que les droites (KD) et (AB) sont parallèles entre elles, puisque perpendiculaires à (BC) .

d) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KB}$.

$\overrightarrow{KB}(x_B - x_K \,;\, y_B - y_K) = (1 - \frac{7}{2} \,;\, -1 - 4) \;\Rightarrow\; \overrightarrow{KB}\,(-\frac{5}{2} \,;\, -5)$.

e) Calculer les coordonnées du point *D* .

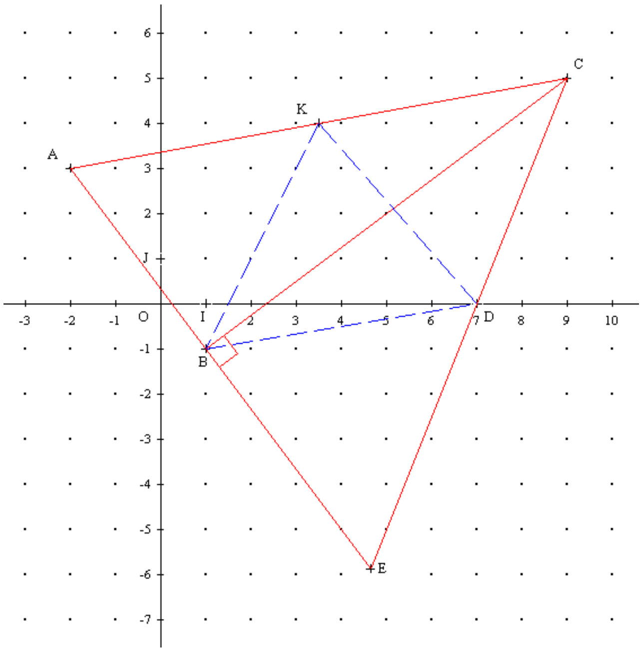
On a vu que D image de C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{KD}$ implique $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{KB}$.

En conséquence : $\overrightarrow{CD}(x_D - x_C \,;\, y_D - y_C) = (x_D - 9 \,;\, y_D - 5)$ et $\overrightarrow{KB}\,(-\frac{5}{2} \,;\, -5)$ ont les mêmes coordonnées :

$\left\{\begin{array}{l} x_D - 9 = -\frac{5}{2} \\ y_D - 5 = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_D = 9 - \frac{5}{2} = \frac{18}{2} - \frac{5}{2} = \frac{13}{2} \\ y_D = -5 + 5 = 0 \end{array}\right\}$. On déduit : $D(\frac{13}{2} \,;\, 0)$ ou $(6{,}5 \,;\, 0)$.

4/ Soit E le point d'intersection des droites (AB) et (CD) .

Démontrer que D est le milieu du segment $[EC]$.



C'est une application du théorème de Thalès : *Droite des Milieux*.

On a montré que la droite (KD) est parallèle à la droite (AB) .

D'après le théorème de Thalès, la droite (KD) qui passe par le milieu K de $[AC]$ coupe le segment $[CE]$ en son milieu, le point D , qui est bien le milieu du segment $[EC]$.

<u>2ème méthode :</u>

On peut aussi dire : (KD) et (AB) étant parallèles : $\dfrac{CK}{CA} = \dfrac{CD}{CE}$.

Or, K milieu de $[AC]$ implique $CA = 2CK$ ou $\dfrac{CK}{CA} = \dfrac{1}{2}$. On déduit $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{1}{2}$, soit $CE = 2CD$.

D est donc bien le milieu du segment $[EC]$.