Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1 - x}$.

1/ Etudier $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x)$.

Si $x \to 1^+$ $\left\{ \begin{array}{c} e^x \to e \\ 1 - x \to 0^- \end{array} \right\}$ d'où : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.

Si $x \to 1^-$ $\left\{ \begin{array}{c} e^x \to e \\ 1 - x \to 0^+ \end{array} \right\}$ d'où : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

Quelle interprétation géométrique peut-on faire des résultats ?

La courbe représentative admet une asymptote verticale $x = 1$.

2/ Etudier $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Si $x \to -\infty$ $\left\{ \begin{array}{c} e^x \to 0^+ \\ 1 - x \to +\infty \end{array} \right\}$ d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Si $x \to +\infty$ $\left\{ \begin{array}{c} e^x \to +\infty \\ 1 - x \to +\infty \end{array} \right\}$ d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ de forme *indéterminée* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

On lève l'indétermination :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1 - x} = -\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x - 1} = -\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = -\infty \text{ puisque } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty .$$

La courbe représentative admet une asymptote horizontale $y = 0$ vers $-\infty$, mais devient $-\infty$ vers $+\infty$.

3/ Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.

$f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

$$f'(x) = \frac{e^x(1 - x) - (-1)e^x}{(1 - x)^2} = \frac{e^x(1 - x) + e^x}{(1 - x)^2} = \frac{e^x[(1 - x) + 1]}{(1 - x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2 - x)e^x}{(1 - x)^2} .$$

Recherche des extrema :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2 - x)e^x = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$ avec $y = f20) = \dfrac{e^2}{1 - 2} = -e^2$, soit $E(2\ ;\ -e^2)$ pour extremum.

Signe de la dérivée :

Comme $\dfrac{e^x}{(1 - x)^2} > 0$, on déduit que $f'(x)$ est du signe de $2 - x$. $\left\{ \begin{array}{l} x < 2 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \\ x = 2 \Leftrightarrow f'(2) = 0 \\ x > 2 \Leftrightarrow f'(x) < 0 \end{array} \right.$.

4/ Dresser le tableau de variation de f .

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty \Vert -\infty$	↗	$-e^2$	↘	$-\infty$

5/ Tracer sa courbe représentative (*C*) dans un repère orthonormé d'unités graphiques 1 cm .