

On considère la fonction $f: x \rightarrow (x + 1)^2$.

1/ Donner l'ensemble de définition de f .

$f(x) = (x + 1)^2$ est calculable pour tout x réel, d'où : $D_f = \mathbb{R}$.

2/ Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$.

1^{ère} méthode :

Soit $-1 \leq a < b$.

Ajouter ou soustraire une expression ne change pas le sens de variation, d'où :

$$0 \leq a + 1 < b + 1.$$

La mise au carré inverse l'ordre de nombre négatifs, mais conserve l'ordre de nombres positifs, ce qui est le cas :

$$0 \leq (a + 1)^2 < (b + 1)^2.$$

On conclue : $-1 \leq a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

La fonction f est *strictement croissante* sur $[-1 ; +\infty[$.

2^{ème} méthode :

Décomposition en fonctions de référence :

$$x \xrightarrow{a} x + 1 \xrightarrow{c} (x + 1)^2.$$

La fonction f est la composée $c \circ a$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{de la fonction affine } x \rightarrow a(x) = x + 1 \\ \text{puis} \\ \text{de la fonction carré } x \rightarrow c(x) = x^2 \end{array} \right.$.

La fonction *affine* a , de coefficient directeur $+1$, est *strictement croissante* sur \mathbb{R} , donc *conserve les ordres* :

$$-1 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow a(-1) \leq a(x_1) < a(x_2) \Rightarrow 0 \leq x_1 + 1 < x_2 + 1.$$

La fonction *carré* c , est *strictement croissante* sur $[0 ; +\infty[$, donc *conserve les ordres des nombres positifs* :

$$0 \leq x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow 0^2 \leq (x_1 + 1)^2 < (x_2 + 1)^2.$$

On constate que : $-1 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1 + 1)^2 < (x_2 + 1)^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

La fonction f est *strictement croissante* sur $[-1 ; +\infty[$.

3/ Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; -1]$.

Seule la 1^{ère} méthode est utilisée :

Soit $a < b \leq -1$.

Ajouter ou soustraire une expression ne change pas le sens de variation, d'où :

$$a + 1 < b + 1 \leq 0.$$

La mise au carré inverse l'ordre de nombre négatifs, ce qui est le cas :

$$(a + 1)^2 > (b + 1)^2.$$

On conclue : $a < b \leq -1 \Rightarrow f(a) > f(b)$.

La fonction f est *strictement décroissante* sur $]-\infty ; -1]$.

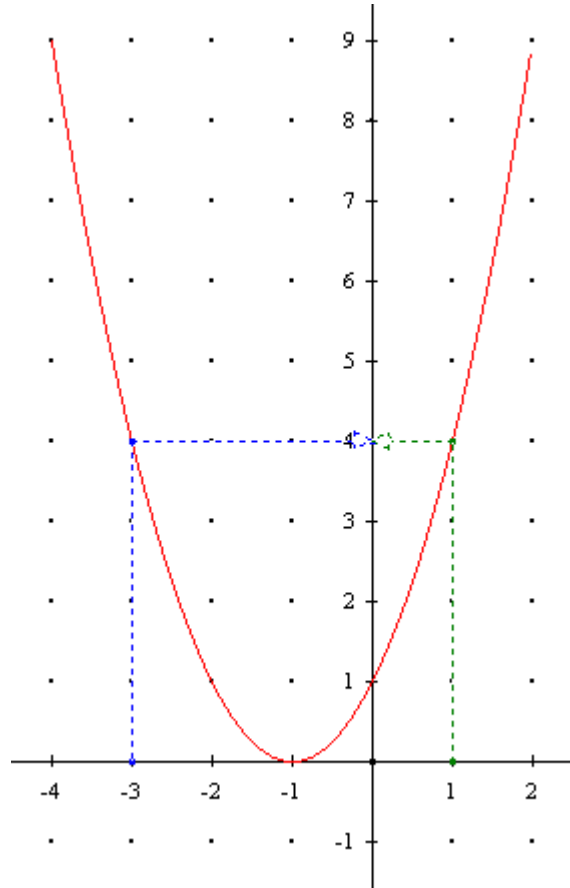
4/ Dresser le tableau de variation de f .

x	$-\infty$		-1	$+\infty$
$f(x)$		\searrow	0	\nearrow

5/ Compléter le tableau suivant :

x	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

6/ Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; I, J)$ avec $OI = OJ = 1 \text{ cm}$.



7/ Résoudre par le calcul l'équation : $(x + 1)^2 = 4$. Faire apparaître les solutions sur le graphique.

$$(x + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = -2 \Leftrightarrow x = -3 \\ x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases} \text{ soit } S = \{-3 ; +1\} \text{ comme l'indique le tableau de valeurs.}$$

Voir les solutions sur le graphique ci-dessus.

$$\text{On pouvait aussi dire : } (x + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow (x + 1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow [(x + 1) + 2][(x + 1) - 2] = 0$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0 \text{ de même solutions } x = -3 \text{ et } x = +1.$$