Deux personnes A et B se donnent rendez-vous entre 12h et 13h .

A arrive à 12h20.

a) Quelle est la probabilité pour que B arrive exactement à la même heure ?

Dans le cas d'une variable aléatoire continue X , on sait que $p(X \in\ ]a\ ;\ b[) = p(X \in [a\ ;\ b])$.

On déduit $p(X = a) = p(X = b) = 0$.

Pour qu'une probabilité soit non nulle, il faut qu'elle concerne l'appartenance à un intervalle continu ne se limitant pas à un point.

b) Quelle est la probabilité pour que la première personne arrivée attende l'autre plus de 10 mn ?

Cela signifie que B doit arriver entre 12h10 et 12h30 .

B peut arriver à tout instant entre $x = 0$ et $x = 60$ minutes après 12 heures.

Soit x le nombre de minutes après 12h à laquelle arrive B :

La probabilité d'arrivée de B est équirépartie sur la plage $[0\ ;\ 60]$, soit une densité de probabilité constante p , telle que

$$\int_0^{60} p\,dx = 1 \Leftrightarrow p\int_0^{60} 1\,dx = 1 \Leftrightarrow p[x]_0^{60} = p(60-0) \Leftrightarrow 60p = 1 \text{ , d'où : } p = p(x) = \frac{1}{60} .$$

Soit $P = P(10 \le x \le 30)$ la probabilité que B arrive entre 12h10 et 12h30 :

$$P = \int_{10}^{30} p(x)dx = \frac{1}{60}\int_{10}^{30} 1\,dx = \frac{30-10}{60} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} .$$

La probabilité pour que l'une des deux personnes attende plus de 10 mn est donc $P' = 1 - P = \frac{2}{3}$.

Remarque : On peut aussi dire que la probabilité pour que x appartienne à l'intervalle $[10\ ;\ 30]$ est le rapport de sa longueur (20) à la longueur maximum possible de $[0\ ;\ 60]$ (60) , d'où : $P = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \Rightarrow P' = \frac{2}{3}$.

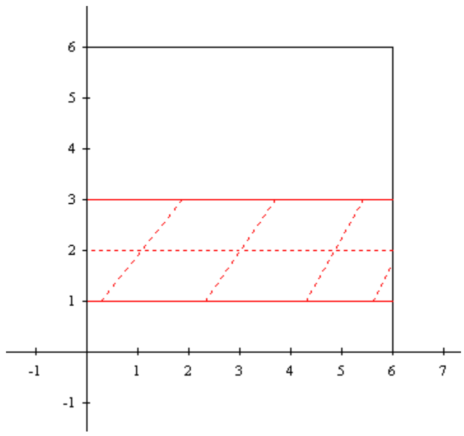
<u>Méthode graphique</u>

Soit $x = 20$ le nombre de minutes après 12h marquant l'arrivée de A .

Soit y le nombre de minutes après 12h marquant l'arrivée de B .

On trace les droites $y = x - 10 = 10$ et $y = x + 10 = 30$, qui délimitent les points $(x\ ;\ y)$ ou l'attente de l'un ou de l'autre est inférieure à 10 mn (entre les droites), ou supérieure à 10 mn (à l'extérieur de ces droites).

La probabilité d'une attente supérieure à 10 mn est égale au rapport de l'aire située à l'extérieur de ces droites sur l'aire totale du carré de côté 60 mn. $(60 \times 60 = 3600)$.



La réunion des deux rectangles extérieurs aux droites a pour aire $60 \times 10 + 60 \times 30 = 60 \times 40 = 2400$.

L'aire totale du carré est : $60 \times 60 = 3600$.

$P' = \frac{2400}{3600} = \frac{2}{3}$.