Une étude a été faite sur les abonnés d'un réseau privé de télévision.

On a constaté, pour chaque année, un taux de réabonnement de 95% , ainsi que l'apparition de 0,4 million de nouveaux abonnés.

On note u_n le nombre d'abonnés en millions au bout de n années et on précise $u_0 = 1$.

1/ Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

Remarque:

$u_0 = 1$, signifie qu'à l'ouverture du service (<u>début</u> d'année 1 = fin d'année 0), on constate 1 million d'abonnements par anticipation.

$u_1 = 0{,}95\ u_0 + 0{,}4 = 0{,}95 \times 1 + 0{,}4 = 1{,}35$ million d'abonnés,

$u_2 = 0{,}95\ u_1 + 0{,}4 = 0{,}95 \times 1{,}35 + 0{,}4 = 1{,}6825$ million d'abonnés,

$u_3 = 0{,}95\ u_2 + 0{,}4 = 0{,}95 \times 1{,}6825 + 0{,}4 = 1{,}998375$ million d'abonnés,

2/ Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

La relation de *récurrence* induite par l'énoncé est : $u_{n+1} = \dfrac{95}{100} u_n + 0{,}4$, soit : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 0{,}95\ u_n + 0{,}4 \end{cases}$.

3/ On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 8$, pour tout entier naturel n .

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

$v_n = u_n - 8 \Leftrightarrow u_n = v_n + 8$ que l'on reporte dans la relation qui lie u_n et u_{n+1} .

$u_{n+1} = 0{,}95u_n + 0{,}4 \Leftrightarrow v_{n+1} + 8 = 0{,}95(v_n + 8) + 0{,}4 \Leftrightarrow v_{n+1} = 0{,}95v_n$.

La suite (v_n) est bien *géométrique* , de raison $q = 0{,}95$, et de premier terme $v_0 = u_0 - 8 = -7$.

b) En déduire l'expression de v_n , puis de u_n en fonction de n .

Une suite géométrique (v_n) vérifie $v_n = v_0q^n$, soit : $v_n = -7(0{,}95)^n$.

On a vu $u_n = v_n + 8$, soit : $u_n = 8 - 7(0{,}95)^n$.

4/ Déterminer le sens de variation et la limite de (u_n) . Interpréter le résultat.

$u_{n+1} - u_n = (v_{n+1} - 8) - (v_n - 8) = v_{n+1} - v_n = -7(0{,}95)^{n+1} + 7(0{,}95)^n = -7[(0{,}95)^{n+1} - (0{,}95)^n] = -7(0{,}95)^n(0{,}95 - 1)$.

$u_{n+1} - u_n = +0{,}35(0{,}95)^n > 0$.

La suite (u_n) est *croissante* .

On sait que si $|\,q\,| < 1$ ($-1 < q < +1$) alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Comme $q = 0{,}95$, on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = \lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}95)^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

$u_n = v_n + 8 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = (\lim\limits_{n \to +\infty} v_n) + 8 = 8$.

Interprétation : Avec le temps, le nombre annuel d'abonnements tendra vers un maximum de 8 millions.

5/ Déterminer à la calculatrice dans combien d'années le nombre d'abonnés dépassera t-il 4 millions ?

$u_n = 8 - 7(0{,}95)^n$.

Donc $u_n \geq 4 \Leftrightarrow 8 - 7(0{,}95)^n \geq 4 \Leftrightarrow -7(0{,}95)^n \geq -4 \Leftrightarrow (0{,}95)^n \leq \dfrac{4}{7}$.

a) *Par les logarithmes* :

$(0,95)^n \leq \frac{4}{7} \Leftrightarrow n \ln(0,95) \leq \ln\left(\frac{4}{7}\right) \Leftrightarrow n \ln(0,95) \leq \ln(4) - \ln(7)$

Comme $0,95 < 1$, on déduit : $\ln(0,95) < 0$.

D'où : $n \geq \frac{\ln(4) - \ln(7)}{\ln(0,95)}$, soit $n \geq 10,91$.

Ce n'est qu'au bout de $n = 11$ années que le nombre d'abonnés dépassera 4 millions.

b) *Par une table sur calculatrice* :

$u_n = 8 - 7(0,95)^n$.

- On pose $f(x) = 8 - 7*(0,95)^x$ que l'on saisit en qualité de fonction Y .
- On saisit une valeur d'initialisation de la table $x = 0$
- On saisit un *pas* égal à 1 (année)
- On affiche la table :

$\left\{\begin{array}{l} \text{Pour } x = 10 \text{ , } Y = 3,8088 \\ \text{Pour } x = 11 \text{ , } Y = 4,0184 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Pour dépasser 4 millions d'abonnés, il faut attendre $n = 11$ années.