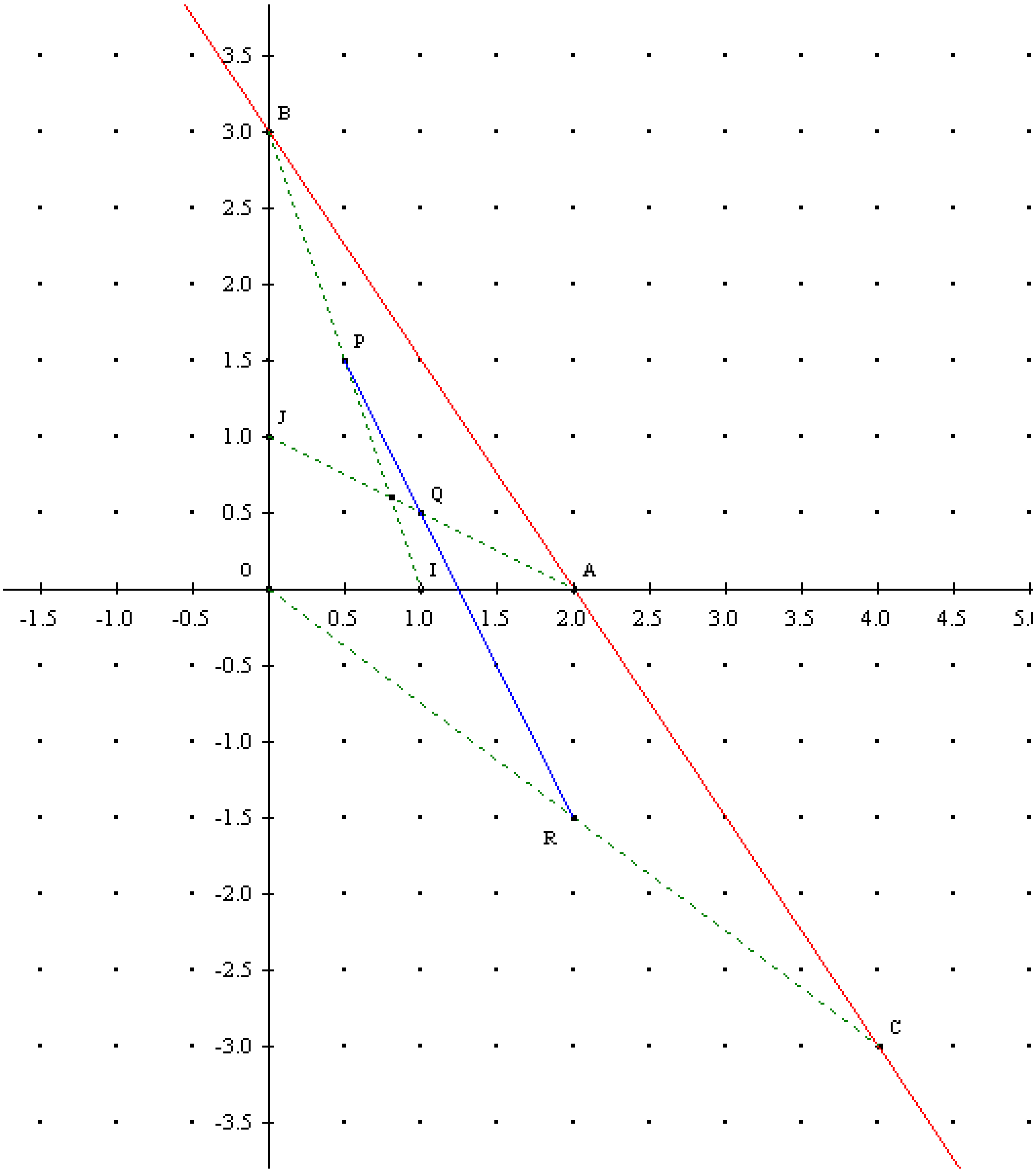
Dans le plan rapporté à un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, soient les points $I(1\ ;\ 0)$, $J(0\ ;\ 1)$, $B(0\ ;\ 3)$ et $C(4\ ;\ -3)$.

1/ Déterminer les coordonnées du point A de l'axe des abscisses qui est aligné avec B et C .



Un point de l'axe des abscisses a une ordonnée nulle, donc s'écrit $A(x_A\ ;\ 0)$, son abscisse x_A restant à déterminer.

$(A\ ;\ B\ ;\ C)$ alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BA} = k\,\overrightarrow{BC}$ (vecteurs colinéaires) avec $k \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{BA}(x_A - x_B\ ;\ y_A - y_B)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{BA}(x_A\ ;\ 0-3)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{BA}(x_A\ ;\ -3)$.

$\overrightarrow{BC}(\ x_C - x_B\ ;\ y_C - y_B)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{BC}(4\ ;\ -6)$.

La colinéarité $\overrightarrow{BA} = k\,\overrightarrow{BC}$ implique $\begin{pmatrix} x_A \\ -3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 4k = x_A \\ -6k = -3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k = x_A \\ k = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

On déduit : $x_A = +2$. Le point cherché est $A(2\ ;\ 0)$, ce que confirme le schéma.

2/ Déterminer les coordonnées des points P, Q, R , milieux respectifs des segments $[IB]$, $[JA]$ et $[OC]$.

P milieu de $[IB]$ $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_P = \dfrac{x_I + x_B}{2} = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2} \\ y_P = \dfrac{y_I + y_B}{2} = \dfrac{0+3}{2} = \dfrac{3}{2} \end{array} \right\}$, soit : $P(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{3}{2})$.

Q milieu de $[JA]$ $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_Q = \dfrac{x_J + x_A}{2} = \dfrac{0+1}{2} = 1 \\ y_Q = \dfrac{y_J + y_A}{2} = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2} \end{array} \right\}$, soit : $Q(1 ; \dfrac{1}{2})$.

R milieu de $[OC]$ $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_R = \dfrac{x_O + x_C}{2} = \dfrac{0+4}{2} = 2 \\ y_R = \dfrac{y_O + y_C}{2} = \dfrac{0-3}{2} = -\dfrac{3}{2} \end{array} \right\}$, soit : $R(2 ; -\dfrac{3}{2})$.

3/ Montrer que les points P , Q et R sont alignés.

(P , Q , R) alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{PR} = k\,\overrightarrow{PQ}$.

$\overrightarrow{PR}(x_R - x_P ; y_R - y_P) \Rightarrow \overrightarrow{PR}(2 - \dfrac{1}{2} ; -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}) \Rightarrow \overrightarrow{PR}(\dfrac{3}{2} ; -3)$.

$\overrightarrow{PQ}(x_Q - x_P ; y_Q - y_P) \Rightarrow \overrightarrow{PQ}(1 - \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}) \Rightarrow \overrightarrow{PQ}(\dfrac{1}{2} ; -1)$.

La colinéarité $\overrightarrow{PR} = k\,\overrightarrow{PQ}$ implique $\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ -3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{k}{2} = \dfrac{3}{2} \\ -k = -3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k = 3 \\ k = 3 \end{array} \right.$.

Les deux valeurs de k sont bien identiques, ce qui prouve la colinéarité de $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$.

Les points $(P ; Q ; R)$ sont alignés.