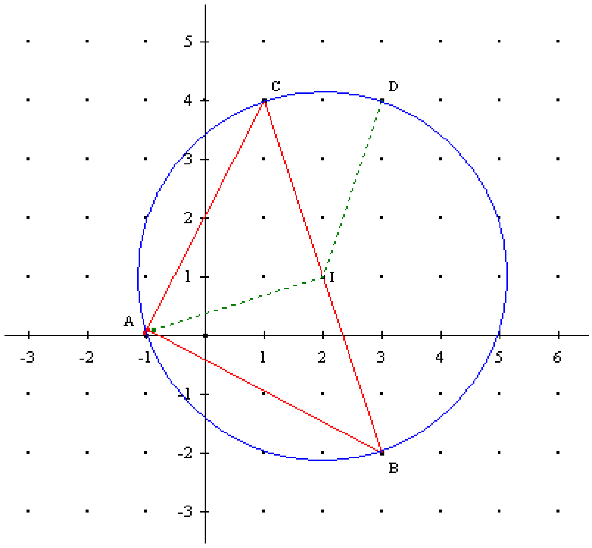
Le repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ étant orthogonal, on considère les points $A(-1\,;\,0)$, $B(3\,;\,-2)$ et $C(1\,;\,4)$.

1/ Quelle est la nature du triangle ABC ?



La figure ci-dessus permet de conjecturer que le triangle ABC soit rectangle en A, et éventuellement qu'il soit isocèle, de sommet A.

Calculons les distances AB, AC et BC afin de contrôler si l'égalité de Pythagore est vérifiée.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{[3-(-1)]^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$.

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{[1-(-1)]^2 + (4-0)^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$AB = AC$, donc le triangle ABC est bien *isocèle*, de sommet A.

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + [4-(-2)]^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$.

On déduit : $AB^2 + AC^2 = 20 + 20 = 40 = BC^2$.

Le triangle ABC est rectangle isocèle, de sommet A.

2/ Déterminer le centre I du cercle circonscrit à ABC, puis son rayon.

Tout triangle rectangle est inscrit dans un demi-cercle dont un diamètre est l'hypoténuse du triangle.

Le centre I du cercle circonscrit au triangle ABC est donc le milieu du côté $[BC]$.

$$\left\{\begin{array}{l} x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{-2+4}{2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow I(2\,;\,1).$$

Le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC est la moitié de son diamètre BC, soit $R = \dfrac{BC}{2} = \sqrt{10}$.

3/ Le point $D(3\,;\,4)$ appartient-il à ce cercle ?

Il suffit de vérifier si D est à la distance R du centre I de ce cercle.

$ID = \sqrt{(x_D - x_I)^2 + (y_D - y_I)^2} = \sqrt{(3-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

On obtient bien $ID = R$.

Le point D est situé sur le cercle circonscrit au triangle ABC.