<u>Partie A :</u>

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x(x-1) + x^2$.

1-a) Montrer que la dérivée de la fonction g est : $g'(x) = x(e^x + 2)$.

g est une fonction *définie* , *continue* et *dérivable* sur $\mathbb{R}$, en qualité de produit et somme de fonctions définies, continues et dérivables sur cet ensemble.

On utilise $(u+v)' = u' + v'$ et $(uv)' = u'v + uv'$.

$g'(x) = 1(e^x + 2) + x.e^x = e^x(x+2)$, pour tout x réel.

b) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.

<u>- Si x tend vers $+\infty$:</u>

On sait $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty \end{array}\right\}$, d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x(x-1) = +\infty$.

Par ailleurs : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

Par addition, on déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} [e^x(x-1) + x^2] = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

<u>- Si x tend vers $-\infty$:</u>

On sait $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (x-1) = +\infty \end{array}\right\}$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x(x-1)$ de forme indéterminée $0 \times \infty$.

Levons l'indétermination :

On sait $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x(x-1) = (\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x) - (\lim\limits_{x \to -\infty} e^x) = 0$.

Par ailleurs : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$, donc ; par addition : $\lim\limits_{x \to -\infty} [e^x(x-1) + x^2] = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

c) Etudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = e^x(x+2)$, qui est toujours du signe de $x+2$, puisque $e^x > 0$, pour tout x réel.

$g(-2) = e^{-2}(-3) + 4 = 4 - \dfrac{3}{e^2} \approx +3{,}59$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0
$g(x)$	$+\infty$	↘	$3{,}59$	↗	$+\infty$

2/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution α sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

La fonction g est *continue* et *strictement croissante* sur $[0 ; +\infty[$.

Par ailleurs, $g(0) = -e < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty > 0$.

Le *théorème de la valeur intermédiaire* permet de conclure que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α *unique* sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Montrer que α appartient à l'intervalle $I = [\frac{1}{2}\,;\,1]$.

Il suffit de vérifier que $g(x)$ est de signes contraires en $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$, or :

$g\left(\frac{1}{2}\right) = e^{1/2}(\frac{1}{2} - 1) + \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1 - 2\sqrt{e}}{4} \approx -0{,}574 < 0$

$g(1) = e^1 \times 0 + 1 = 1 > 0$.

On peut conclure : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ avec $g(\alpha) = 0$, seule solution sur $[0\,;+\infty[$.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + x}$.

1/ Montrer que les équations $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ sont équivalents sur $[0\,;+\infty[$, et qu'en conséquence, l'équation $f(x) = x$ admet α pour unique solution sur I .

Soit $f(x) = x$, que l'on étudie sur $[0\,;+\infty[$.

$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{e^x + x} - x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - x(e^x + x)}{e^x + x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x(1 - x) - x^2}{e^x + x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x(x - 1) + x^2}{e^x + x} = 0$,

soit $\dfrac{g(x)}{e^x + x} = 0$.

Comme le domaine impose $x \geq 0$ et que $e^x > 0$, pour tout x réel, on déduit : $e^x + x > 0$ sur $[0\,;+\infty[$.

Le dénominateur étant non nul, on déduit : $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{g(x)}{e^x + x} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$ sur $[0\,;+\infty[$.

La question A-2/ a prouvé qu'il existe une *solution unique* α appartenant à $I = [\frac{1}{2}\,;\,1\,]$ pour cette équation.

Donc, l'équation $f(x) = x$ admet α pour unique solution sur I .

2-a) Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

$f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, d'où : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{e^x(e^x + x) - (e^x + 1)e^x}{(e^x + x)^2} = \dfrac{e^{2x} + xe^x - e^{2x} - e^x}{(e^x + x)^2}$,

$f'(x) = \dfrac{e^x(x - 1)}{(e^x + x)^2}$. $f'(x)$ est du signe de $x - 1$, $f(0) = 1$ et $f(1) = \dfrac{e}{e + 1} \approx 0{,}73$.

x	0		1		$+\infty$
$f\,'(x)$	-1	–	0	+	
$f\,(x)$	1	↘	0,73	↗	

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + x}$ est de forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. en $+\infty$.

Levons l'indétermination : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x(1 + \frac{x}{e^x})} = \dfrac{1}{1 + \frac{x}{e^x}}$.

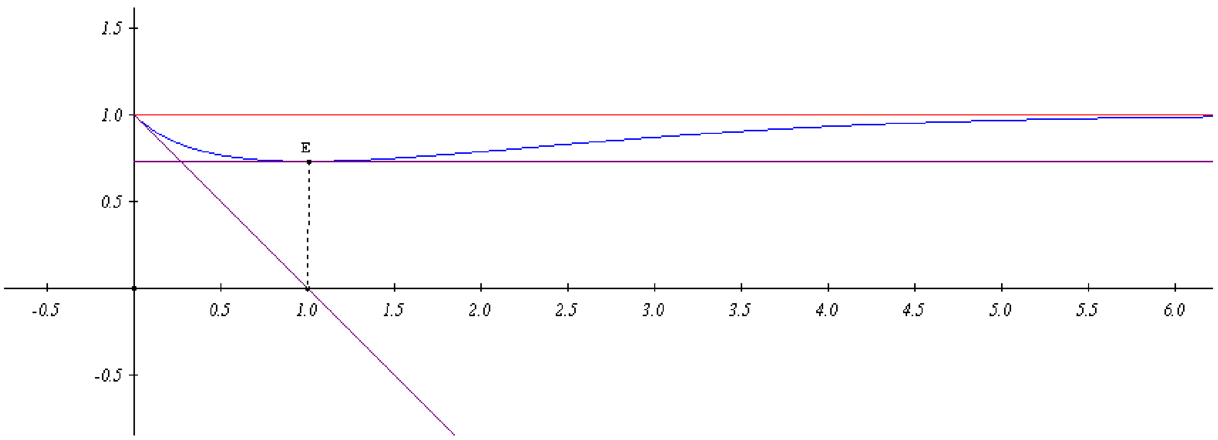
On sait $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$, dont on déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

La courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	-1	$-$	0	+	
$f(x)$	1	↘	$\dfrac{e}{e+1}$	↗	1

d) Construire dans un repère orthonormal, d'unité 2 cm, la courbe (C) représentative de f sur $[0 ; +\infty[$.



On indiquera en particulier les tangentes à (C) aux points d'abscisses 0 et 1 .

$T_0 :\ y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Rightarrow T_0 :\ y = -x + 1$.

$T_1 :\ y = \dfrac{e}{e+1}$, extremum., donc tangente horizontale.