Soit un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

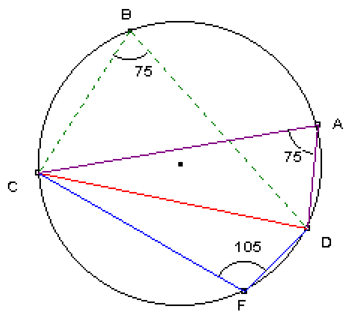
On donne les points A, B, C et D, d'affixes respectives $2 + 3i$, $3 + 2i$, -1, $2 - i$.

Montrer que les points A, B, C et D sont cocycliques.

1ère méthode :

On sait que deux angles inscrits interceptant une même corde, dont les sommets sont d'un même côté de cette corde, sont égaux (en respectant le sens des angles orientés).

$(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BD})\ [2\pi]$, que l'on écrira : $\beta \equiv \alpha\ [2\pi]$.



On sait également que deux angles inscrits interceptant une même corde, dont les sommets sont de part et d'autre de cette corde, sont supplémentaires, soit de somme 180°, comme sur la figure ci-dessus.

$\widehat{CBD} + \widehat{CFD} = 180°$, soit $\alpha + \beta = \pi$.

Seulement cette présentation ne tient pas compte du sens des angles, or si on respecte les angles orientés, l'angle $(\overrightarrow{FC} ; \overrightarrow{FD})$ doit tourner par l'extérieur et non l'intérieur de l'angle, comme sur la figure précédente.

Sur cette figure : $(\overrightarrow{FC} ; \overrightarrow{FD}) \equiv 360° - 105° = +255° \Rightarrow \beta - \alpha = \pi\ [2\pi]$, ou $\beta \equiv \pi + \alpha\ [2\pi]$.

Pour résumer :

- Si A et B du même côté de $[CD]$: $(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BD})\ [2\pi] \Leftrightarrow \beta \equiv \alpha\ [2\pi]$
- Si A et B de part et d'autre de $[CD]$: $(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AD}) \equiv \pi + (\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BD})\ [2\pi] \Leftrightarrow \beta \equiv \pi + \alpha\ [2\pi]$

Synthèse : $\boxed{(A, B, C, D) \text{ cocycliques} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BD})\ [\boldsymbol{\pi}]}$

Traduction en nombres complexes : $(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AD}) = \text{Arg}\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right)$ et $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BD}) = \text{Arg}\left(\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_B}\right)$

D'où : $\text{Arg}\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \text{Arg}\left(\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_B}\right) [\pi] \Leftrightarrow \text{Arg}\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right) - \text{Arg}\left(\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_B}\right) \equiv [\pi]$.

(A, B, C, D) cocycliques $\Leftrightarrow \text{Arg}\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_C - z_A} : \dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_B}\right) \equiv 0\ [\pi]$.

Application : $z_D - z_A = (2 - i) - (2 + 3i) = -4i$.

$z_C - z_A = -1 - (2 + 3i) = -3 - 3i$.

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{4i}{3(1+i)} = \frac{4i(1-i)}{6} = \frac{2(1+i)}{3} .$$

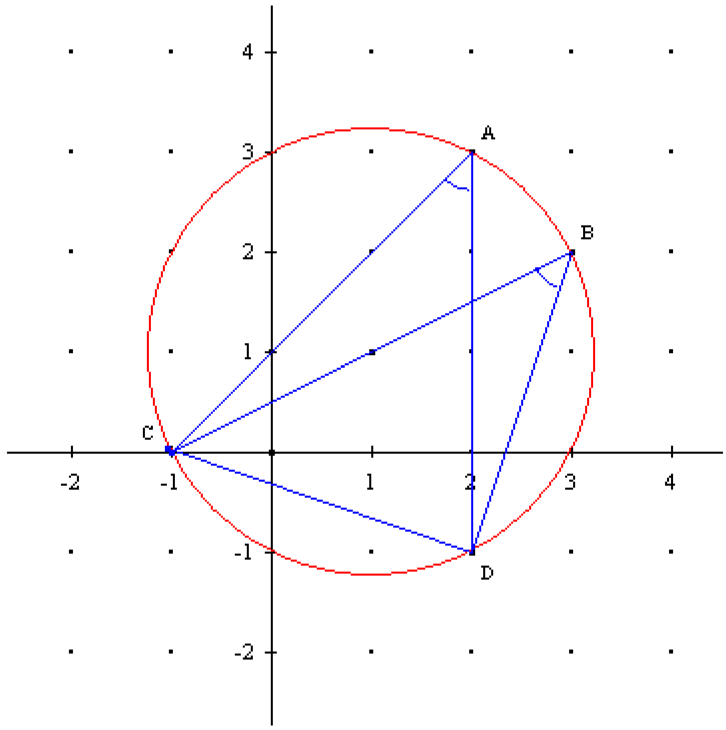
De même : $z_D - z_B = (2 - i) - (3 + 2i) = -1 - 3i$.

$z_C - z_B = -1 - (3 + 2i) = -4 - 2i$.

$$\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{1 + 3i}{4 + 2i} = \frac{(1 + 3i)(4 - 2i)}{20} = \frac{10 + 10i}{20} = \frac{1 + i}{2} .$$

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} : \frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} \times \frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \frac{2(1 + i)}{3} \times \frac{2}{1 + i} = \frac{4}{3} .$$

$\dfrac{z_D - z_A}{z_C - z_A} : \dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{4}{3}$ d'argument $0\ [2\pi]$, ce qui prouve que A et B sont du même côté de la corde $[BC]$.



<u>2ème méthode :</u>

On peut évidemment chercher les équations des médiatrices de $[AC]$ et $[BD]$, chercher leur intersection Ω , puis vérifier $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.