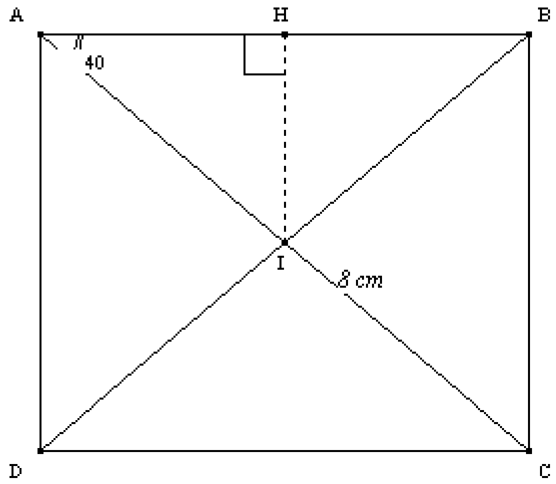
**$ABCD$ est un rectangle. Soit $I$ le point de concours des diagonales et $H$ le milieu du segment $[AB]$ .**

**1/ Quelle est la nature des triangles $AIB$ et $AIH$ ?**




Les diagonales d'un *parallélogramme* ont même milieu $I$ , et de plus, dans le cas d'un *rectangle* , elles sont égales.

Donc : $IA = IB = IC = ID = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{BD}{2} = 4$ cm.

Comme $IA = IB$ , le triangle $AIB$ est *isocèle*, de sommet $I$ .

Dans un triangle *isocèle* , la *médiane* relative à la base est également *hauteur*, *médiatrice* et *bissectrice*.
Comme $[IH]$ est la médiane relative à la base $[AB]$ du triangle isocèle $AIB$ , elle est également hauteur, ce qui prouve que le triangle $AIH$ est rectangle en $H$.

**2/ On suppose que $AC = 8$ cm et que $\widehat{BAI} = 40°$ .**
**Calculer $AH$ et $HI$ , puis en déduire les longueurs des côtés du rectangle $ABCD$ .**

La figure précédente respecte les hypothèses posées.

<u>Calcul de $AH$ :</u>

Il faut choisir une *ligne trigonométrique* (sinus, cosinus, tangente) de l'angle $\hat{A} = \widehat{BAI} = 40°$ , qui fasse intervenir $AH$ , et dont tous les autres éléments sont de valeur connue.

Dans le triangle rectangle $AIH$ : $\cos \hat{A} = \dfrac{AH}{AI} \Leftrightarrow \cos(40°) = \dfrac{AH}{4} \Leftrightarrow AH = 4 \times \cos(40°) = 3{,}06$ cm.

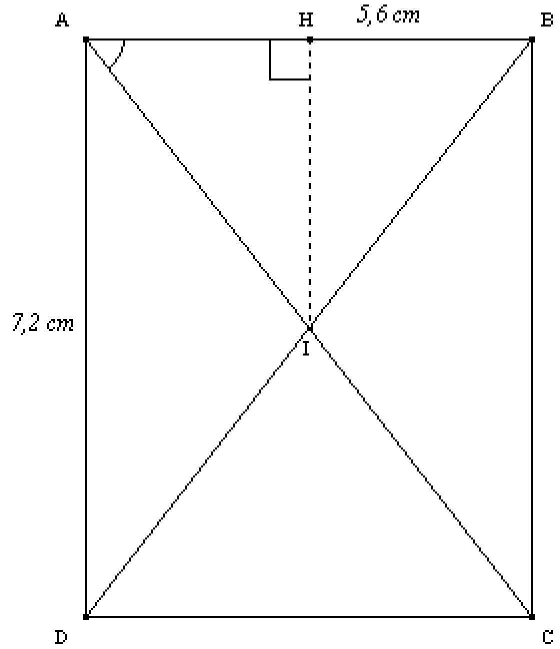
<u>Calcul de $HI$ :</u>

De même : $\sin \hat{A} = \dfrac{HI}{AI} \Leftrightarrow \sin(40°) = \dfrac{HI}{4} \Leftrightarrow HI = 4 \times \sin(40°) = 2{,}57$ cm.

<u>Calculs de $AB$ et $BC$:</u>

$AB = 2AH = 6{,}12$ cm et $BC = 2HI = 5{,}14$ cm.

**3/ On suppose maintenant que $AB = 5{,}6$ cm et que $BC = 7{,}2$ cm.**




**a) Calculer l'angle $\widehat{BAC}$ (arrondir à 0,1°) .**

Il faut choisir une *ligne trigonométrique* (sinus, cosinus, tangente) de l'angle $\hat{A} = \widehat{BAC}$ , dont tous les autres éléments sont de valeur connue.

Dans le triangle rectangle $ABC$ : $\tan \hat{A} = \dfrac{BC}{AB}$ , avec $BC = AD = 7{,}2$ cm et $AB = 5{,}6$ cm.

$\tan \hat{A} = \dfrac{7{,}2}{5{,}6} = \dfrac{72}{56} = \dfrac{9}{7} \Leftrightarrow \hat{A} = \tan^{-1}\left(\dfrac{9}{7}\right) = 52{,}1°$ .

**b) En déduire la longueur de $AC$ , puis la valeur en degrés des angles $\widehat{AIH}$ et $\widehat{AIB}$ .**

<u>Calcul de $AC$ :</u>

Connaissant $AB$ et $AC$ , on pourrait utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle $ABC$ .

Comme l'énoncé précise "en déduire", il faut calculer à partir de l'angle $\widehat{BAC}$ .

$\cos \hat{A} = \dfrac{AB}{AC} \Leftrightarrow AC = \dfrac{AB}{\cos \hat{A}} = \dfrac{5{,}6}{\cos (52{,}1°)} = 9{,}12$ cm.

<u>Calcul de $\widehat{AIH}$</u> :

Dans le triangle rectangle $AIH$ : $\widehat{HAI} + \widehat{AIH} = 90° \Rightarrow \widehat{AIH} = 90° - \widehat{BAC} = 90° - 52{,}1° = 37{,}9°$ .

<u>Calcul de $\widehat{AIB}$</u> :

On sait que dans le triangle isocèle $AIB$ , de sommet $I$ , $(IH)$ est la bissectrice de $\widehat{AIB}$ , d'où :

$\widehat{AIB} = 2 \times \widehat{AIH} = 75{,}8°$ .