En évitant autant que possible d'utiliser la résolution des équations du second degré, par Δ , résoudre les inéquations suivantes :

a) $e^{-5x} > -e^{5x}$

Une *exponentielle* est toujours *strictement positive* , soit $e^a > 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

D'où $-5e^{5x} > 0$, ce qui fait que $e^{-5x} > -e^{5x}$ est toujours vrai.

$S = \mathbb{R}$.

b) $e^{-5x} \geq e^{5x}$

La fonction *exponentielle* est *continue* et *strictement croissante* sur $\mathbb{R}$, ce qui fait qu'elle *conserve les ordres* : $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$ (propriété 1).

$e^{-5x} \geq e^{5x} \Leftrightarrow -5x \geq 5x \Leftrightarrow -10x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

$S =]-\infty ; 0]$.

c) $e^{x/2} < e$

D'après la propriété (1) : $e^{x/2} < e \Leftrightarrow e^{x/2} < e^1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} < 1 \Leftrightarrow x < 2$.

$S =]-\infty ; 2[$.

d) $e^{-x} > 1$

$e^{-x} > 1 \Leftrightarrow e^{-x} > e^0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$.

$S =]-\infty ; 0[$.

e) $e^{-x+5} > e^x$

$e^{-x+5} > e^x \Leftrightarrow -x + 5 > x \Leftrightarrow -2x > -5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$.

$S =]-\infty ; \frac{5}{2}[$.

f) $e^{x^2} \leq (e^x)^2$

$e^{x^2} \leq (e^x)^2 \Leftrightarrow e^{x^2} \leq e^{2x} \Leftrightarrow x^2 \leq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \leq 0$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		–	0	+	|	+	
$x - 2$		–	|	–	0	+	
$x(x - 2)$		+	0	–	0	+	

$S = [0 ; 2]$.

g) $e^{2x} - (1 + e)e^x + e \geq 0$

Par le second degré :

Résolvons $e^{2x} - (1 + e)e^x + e = 0$.

On pose $X = e^x$, ce qui impose $X > 0$.

Comme $e^{2x} = (e^x)^2$, on déduit : $X^2 - (1 + e)X + e = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (1 + e)^2 - 4e = (1 + 2e + e^2) - 4e = e^2 - 2e + 1 = (e - 1)^2 > 0$.

Les racines sont $\begin{cases} X' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{(1 + e) + (e - 1)}{2} = e \\ X'' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{(1 + e) - (e - 1)}{2} = 1 \end{cases}$.

Le trinôme du second degré est du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines, soit :

$X^2 - (1 + e)X + e \geq 0 \iff X \leq 1$ ou $X \geq e$.

$X \leq 1$ ou $X \geq e \iff \begin{cases} e^x \leq 1 \iff e^x \leq e^0 \iff x \leq 0 \\ \text{ou} \\ X \geq e \iff e^x \geq e^1 \iff x \geq 1 \end{cases}$.

$S =]-\infty ; 0] \cup [1 ; +\infty[$.

Directement : (*ce qui impose de "voir" une astuce*)

$e^{2x} - (1 + e)e^x + e \geq 0 \iff e^{2x} - e^x - e^{x+1} + e \geq 0 \iff (e^{2x} - e^x) - (e^{x+1} - e) \geq 0 \iff e^x(e^x - 1) - e(e^x - 1) \geq 0$

On déduit : $(e^x - 1)(e^x - e) \geq 0$.

Posons $X = e^x$, soit $(X - 1)(X - e) \geq 0$, dont on établit le tableau de signes :

X	$-\infty$		1		e		$+\infty$
$X - 1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$X - e$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(X - 1)(X - e)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$(X - 1)(X - e) \geq 0 \iff X \leq 1$ ou $X \geq e$.

$X \leq 1$ ou $X \geq e \iff \begin{cases} e^x \leq 1 \iff e^x \leq e^0 \iff x \leq 0 \\ \text{ou} \\ X \geq e \iff e^x \geq e^1 \iff x \geq 1 \end{cases}$.

$S =]-\infty ; 0] \cup [1 ; +\infty[$.

h) $e^x + e^{-x} \geq 2$.

$e^x + e^{-x} \geq 2 \iff e^x + \dfrac{1}{e^x} \geq 2 \iff \dfrac{e^{2x} + 1}{e^x} \geq 2 \iff e^{2x} + 1 \geq 2e^x$ (l'exponentielle étant strictement positive, on a multiplié les deux membres par e^x sans changer le sens de l'inéquation).

On déduit : $e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0 \iff (e^x - 1)^2 \geq 0$, ce qui est toujours vrai.

$S = \mathbb{R}$.