En évitant autant que possible d'utiliser la résolution des équations du second degré, par Δ, résoudre les équations suivantes :

a) $e^{2x-5} = \dfrac{1}{e}$

La fonction *exponentielle* est *continue* et *strictement croissante* sur $\mathbb{R}$, ce qui fait qu'elle est *injective* :

$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.

$e^{2x-5} = \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow e^{2x-5} = e^{-1} \Leftrightarrow 2x - 5 = -1 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$, soit $S = \{+2\}$.

b) $e^{2x-5} = -e$

Le résultat d'une exponentielle est toujours strictement positif, d'où : $e^a > 0$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

Comme $-e$ est un nombre négatif, l'équation $e^{2x-5} = -e$ ne peut admettre de solution x dans $\mathbb{R}$.

Soit $S = \varnothing$.

c) $e^{2x^2} - e^{-4x+30} = 0$

$e^{2x^2} - e^{-4x+30} = 0 \Leftrightarrow e^{2x^2} = e^{-4x+30}$

Comme $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$, on déduit $2x^2 = -4x + 30 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 30 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 256 = 16^2 \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4+16}{4} = 3 \\ x'' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-16}{4} = -5 \end{cases} .$$

Soit $S = \{-5 ; +3\}$.

d) $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$

$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0$.

Comme $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$, on déduit $x = 0$, soit $S = \{0\}$.

e) $e^{2x} - (1+e)e^x + e = 0$

Par le second degré :

On pose $X = e^x$, ce qui impose $X > 0$.

Comme $e^{2x} = (e^x)^2$, on déduit : $X^2 - (1+e)X + e = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (1+e)^2 - 4e = (1 + 2e + e^2) - 4e = e^2 - 2e + 1 = (e-1)^2 > 0$.

$$\text{Les racines sont } \begin{cases} X' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{(1+e)+(e-1)}{2} = e \\ X'' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{(1+e)-(e-1)}{2} = 1 \end{cases} .$$

$\begin{cases} X' = e \Leftrightarrow e^x = e \Leftrightarrow e^x = e^1 \Leftrightarrow x = 1 \\ X'' = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$. D'où $S = \{1 ; 0\}$.

Directement : (*ce qui impose de "voir" une astuce*)

$e^{2x} - (1 + e)e^x + e = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - e^{x+1} + e = 0 \Leftrightarrow (e^{2x} - e^x) - (e^{x+1} - e) = 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 1) - e(e^x - 1) = 0$

On déduit : $(e^x - 1)(e^x - e) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0 \\ e^x - e = 0 \Leftrightarrow e^x = e \Leftrightarrow e^x = e^1 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$. D'où $S = \{1 ; 0\}$.

f) $\boldsymbol{e^{3x+1} + e^{2x+1} = e^{x+2} + e^{2x+2}}$ **.**

$e^{3x+1} + e^{2x+1} = e^{x+2} + e^{2x+2} \Leftrightarrow e(e^{3x} + e^{2x}) = e^2(e^x + e^{2x}) \Leftrightarrow e.e^x(e^{2x} + e^x) = e^2(e^{2x} + e^x)$.

On simplifie par $e \neq 0$: $e^x(e^{2x} + e^x) = e(e^{2x} + e^x)$.

On simplifie par $e^{2x} + e^x > 0$: $e^x = e \Leftrightarrow e^x = e^1 \Leftrightarrow x = 1$.

D'où : $S = \{+1\}$.