Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$.

1-a) Démontrer que, pour tout $x \neq 0$, on a $|f(x)| \leq |x|^2$.

On sait que, pour tout α réel, $-1 \leq \sin\alpha \leq +1$, soit $|\sin\alpha| \leq 1$.

Donc : $x \neq 0 \Rightarrow -1 \leq \sin\dfrac{1}{x} \leq +1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \sin\dfrac{1}{x} \leq x^2 \Rightarrow -x^2 \leq f(x) \leq x^2 \Rightarrow |f(x)| \leq |x|^2$.

b) En déduire que f est continue en $x = 0$.

$|f(x)| \leq |x|^2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, ce qui prouve que f est continue en $x = 0$, condition préalable indispensable pour que f puisse être dérivable en 0 .

c) Montrer que, pour tout $x \neq 0$, on a $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leq |x|$.

Comme $|x| > 0$, on déduit de $|f(x)| \leq |x|^2$ que $\dfrac{|f(x)|}{|x|} \leq |x|$, soit $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leq |x|$ pour tout $x \neq 0$.

d) En déduire que f est dérivable en $x = 0$.

En revenant à la définition du nombre dérivé en a : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, on déduit :

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, avec $f(0) = 0$ par définition de f , d'où $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

$|f'(0)| = \lim\limits_{x \to 0} \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leq \lim\limits_{x \to 0} |x|$, soit $f'(0) = 0$.

La fonction f est dérivable en $x = 0$, et sa dérivée est nulle en ce point.

2-a) Déterminer la dérivée de f en $x \neq 0$.

Si $x \neq 0$: $f = U.V$ avec $U(x) = x^2$ et $V(x) = \sin\dfrac{1}{x}$.

$f' = U'V + UV' \Rightarrow f'(x) = 2x \sin\dfrac{1}{x} + x^2 \left(\sin\dfrac{1}{x}\right)'$. Par ailleurs : $\sin\dfrac{1}{x}$ est de la forme $\sin u$, avec $(\sin u)' = u' \cos u$.

On déduit : $\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} \cos\dfrac{1}{x}$, que l'on reporte dans la dérivée $f'(x)$.

$f'(x) = 2x \sin\dfrac{1}{x} + x^2 \left(-\dfrac{1}{x^2} \cos\dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = 2x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\left|f'\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)\right| = 1$.

$n \neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{n\pi} \neq 0 \Rightarrow f'\left(\dfrac{1}{n\pi}\right) = \dfrac{2}{n\pi} \sin n\pi - \cos n\pi$, après report de $x = \dfrac{1}{n\pi}$ dans la formule précédente.

On sait $\sin n\pi = 0$ pour tout entier n , $\cos n\pi = 1$ si n est un entier pair , $\cos n\pi = -1$ si n est un entier impair.

$f'\left(\dfrac{1}{n\pi}\right) = -\cos n\pi \Rightarrow \left|f'\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)\right| = |-\cos n\pi| = 1$.

c) En déduire que la fonction f' n'est pas continue en 0 .

Pour que f' soit continue en $x = 0$; il faudrait $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = f'(0)$.

On a vu que $f'(0) = 0$.

Par contre, en faisant tendre n vers $+\infty$, le terme $x = \dfrac{1}{n\pi}$ tend vers 0 par valeurs positives.

Donc, il est équivalent de faire $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f'\left(\dfrac{1}{n\pi}\right) = 1$, pour tout n entier naturel.

En conséquence : $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 1$, ce qui prouve déjà que la dérivée f' n'est pas continue en 0 , puisque la valeur attendue était 0 .

On peut aussi étudier la dérivabilité de f' en 0 , par valeurs négatives :

$f'(x) = 2x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(-x) = -2x \sin\left(-\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(-\dfrac{1}{x}\right)$.

Or : $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ et $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

En conséquence : $f'(-x) = 2x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} = f'(x)$. La fonction f' est paire, d'où : $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 1$.

La fonction f est continue en 0 , dérivable en 0 , mais sa propre dérivée f' n'est pas continue en 0 .