On considère les suites (u_n) et (v_n) ayant $\mathbb{N}$ pour ensemble de définition et telles que :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \quad \text{et} \quad v_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \quad \text{pour tout } n \text{ entier naturel} \end{cases}$$

1/ On note (w_n) la suite ayant $\mathbb{N}$ pour domaine de définition et telle que, pour tout entier naturel :

$w_n = u_n - v_n$.

a) Calculer u_1 , v_1 , w_0 et w_1 .

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{7}{2} \quad \text{et} \quad v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{\frac{7}{2} + 4}{2} = \frac{15}{4} .$$

$$w_0 = u_0 - v_0 = -1 \quad \text{et} \quad w_1 = u_1 - v_1 = \frac{7}{2} - \frac{15}{4} = -\frac{1}{4}$$

b) Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{u_{n+1} + v_n}{2} = \frac{u_n - u_{n+1}}{2} = \frac{1}{2}(u_n - u_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{u_n + v_n}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{u_n - v_n}{2} ;$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n - v_n) \;\Rightarrow\; w_{n+1} = \frac{1}{4} w_n .$$

La suite (w_n) est géométrique, de raison $q = \frac{1}{4}$.

c) Soit $\in \mathbb{N}$. Exprimer w_n en fonction de n .

En conséquence de b) : $w_n = w_0.q^n = (-1)\left(\frac{1}{4}\right)^n \;\Rightarrow\; w_n = -\frac{1}{4^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Préciser la limite de (w_n) .

$|q| < 1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$. La suite (w_n) converge vers 0 .

2/ Etudier le sens de variation de (u_n) et de (v_n) .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = -\frac{1}{2}(u_n - v_n) = -\frac{1}{2} w_n .$$

Comme $w_n = -\frac{1}{4^n}$ est négatif pour tout entier naturel n , on déduit : $u_{n+1} - u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) est *croissante* .

De même :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n = \frac{u_{n+1} - v_n}{2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} - v_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n + v_n}{2} - v_n\right) = \frac{1}{2}\,\frac{u_n - v_n}{2} ;$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}(u_n - v_n) = \frac{1}{4} w_n .$$

Comme $w_n = -\frac{1}{4^n}$ est négatif pour tout entier naturel n , on déduit : $v_{n+1} - v_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

La suite (v_n) est *décroissante* .

3 – a) Justifier que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si :

- L'une est croissante quand l'autre est décroissante
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

La première condition est satisfaite, puisque (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.

Par ailleurs :

$u_n - v_n = w_n$ et on a vu $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b) Que peut-on en déduire concernant $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$?

Deux suites adjacentes ont même limite L .

Comme $u_0 = 3$ et $v_0 = 4$, on peut affirmer : $3 \le L \le 4$.

4/ On note (t_n) la suite ayant $\mathbb{N}$ pour ensemble de définition et telle que, pour tout entier naturel n :

$$t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

a) Démontrer que (t_n) est constante.

Il suffit de vérifier que $t_{n+1} = t_n$, pour tout entier naturel n , ce qui impliquera : $t_n = t_0$ donc constant.

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} = \frac{\dfrac{u_n + v_n}{2} + 2\left(\dfrac{u_{n+1} + v_n}{2}\right)}{3} = \frac{2u_{n+1} + u_n + 3v_n}{6}.$$

Reportons $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \Leftrightarrow 2u_{n+1} = u_n + v_n$.

$t_{n+1} = \dfrac{(u_n + v_n) + u_n + 3v_n}{6} = \dfrac{2u_n + 4v_n}{6} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$, soit $t_{n+1} = t_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On déduit $t_n = t_0 = \dfrac{u_0 + 2v_0}{3} = \dfrac{11}{3}$, pour chaque n entier, donc une suite *constante*.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

En passant $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} = \dfrac{11}{3}$ à sa limite, on obtient $\dfrac{L + 2L}{3} = \dfrac{11}{3} \Leftrightarrow 3L = 11 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L = \dfrac{11}{3}$.