1/ Démontrer que $\ln(1+x) \leq x$, pour tout $x > 0$.

Soit $f(x) = \ln(1+x) - x$, fonction définie, continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

$f(0) = 0$ et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = -\dfrac{x}{1+x} < 0$, pour tout $x > 0$.

La fonction f est donc continue et décroissante, avec pour valeur de départ $f(0) = 0$.

On conclue : $f(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\Leftrightarrow$ $\ln(1+x) \leq x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

2/ En se servant éventuellement du résultat précédent lors de calculs intermédiaires, démontrer par récurrence : $\dfrac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n$.

Soit la relation de récurrence P_n : $\dfrac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) (<u>Initialisation</u>) – Vérifions P_0 vraie :

P_0 affirme : $\dfrac{(0+1)^0}{0!} \leq e^0$, soit $1 \leq 1$, ce qui est vrai.

b) (<u>Hérédité</u>) - Supposons P_n vraie ($\dfrac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n$) . Peut-on en déduire P_{n+1} vraie ($\dfrac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{n+1}$) ?

$$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{n!} \times \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)(n+1)^n} = \frac{(n+1)^n}{n!} \times \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)^n}{n!} \times \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} .$$

On a supposé $\dfrac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n$ et on veut montrer $\dfrac{(n+1)^n}{n!} \times \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \leq e^{n+1}$.

$$e^n \times \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \leq e^{n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \leq e .$$

Pour démontrer ce résultat, on va utiliser le 1/ :

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \leq e \Leftrightarrow (n+1)\ln\frac{n+2}{n+1} \leq 1 \Leftrightarrow \ln\frac{n+2}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} .$$

En posant $x = \dfrac{1}{n+1}$, on retrouve le résultat $\ln(1+x) \leq x$, si $x > 0$.

L'hérédité est bien vérifié.

c) (<u>Conclusion</u>) – La proposition P_n : $\dfrac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n$, est vérifiée pour tout n entier naturel.