Dans tout l'exercice, A et B étant deux évènements, $p(A)$ désigne la probabilité de A et $p(B/A)$ la probabilité de B sachant A réalisé (également noté $p_A(B)$).

1/ Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X, dont la loi de probabilité est :

i	0	1	2
$p_i = p(X = i)$	0,1	0,5	0,4

a) Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

Soit F la fonction de répartition de X.

Elle est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs sur $[0\,;1]$ par $F(x) = p(X \leq x)$, pour tout x réel.

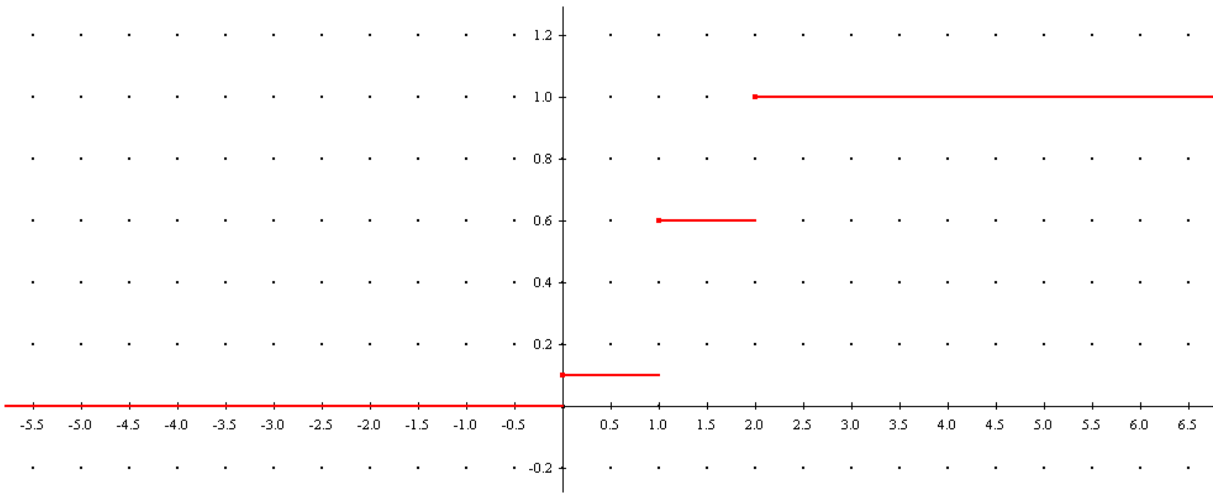
Ici, les seules valeurs de X étant 0 , 1 , 2 , on déduit :

$x < 0 \Leftrightarrow F(x) = p(X \leq x) = p(X < 0) = 0$,

$0 \leq x < 1 \Leftrightarrow F(x) = p(X \leq x) = p(X < 1) = p(X = 0) = 0{,}1$,

$1 \leq x < 2 \Leftrightarrow F(x) = p(X \leq x) = p(X < 2) = p(X = 0) + p(X = 1) = 0{,}6$,

$x \geq 2 \Leftrightarrow F(x) = p(X \leq x) = p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X= 2) = 1$.



b) Calculer l'espérance mathématique de X.

$E(X) = \sum_{i=0}^{2} p_i x_i = p_1\times 0 + p_2\times 1 + p_3\times 2 = 0{,}1\times 0 + 0{,}5\times 1 + 0{,}4\times 2 = 1{,}3$.

En moyenne, 1,3 clients se présente à la station service en cinq minutes.

Ce résultat est à interpréter selon la loi des grands nombres : En 500 mn , environ 130 clients.

2/ Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 , celle qu'il achète du gazole est 0,3 . Son choix est indépendant de celui des autres clients.

On considère les évènements suivants :

- **C_1 : "en cinq minutes, un seul client se présente",**
- **C_2 : "en cinq minutes, deux clients se présentent",**
- **E : "en cinq minutes, un seul client achète de l'essence".**

a) Calculer $p(C_1 \cap E)$.

$p(C_1 \cap E) = p(C_1) \times p_{c1}(E) = 0{,}5 \times 0{,}7 = 0{,}35$.

b) Montrer que $p_{C2}(E) = 0{,}42$ et calculer $p(C_2 \cap E)$.

On Appellera e l'événement : "Ce client prend de l'essence" , qu'il ne faut pas confondre avec E : "Un seul client prend de l'essence".

$p_{C2}(E) = p(e\ ;\ \overline{e}\ ) + p(\ \overline{e}\ ;\ e) = 2p(e\ ;\ \overline{e}\ ) = 2 \times 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}42$.

$p(C_2 \cap E) = p(C_2) \times p_{C2}(E) = 0{,}4 \times 0{,}42 = 0{,}168$.

c) En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

$p(E) = p(C_0 \cap E) + p(C_1 \cap E) + p(C_2 \cap E)$, ces évènements étant incompatibles.

$p(E) = 0 + 0{,}35 + 0{,}168 = 0{,}518$.

3/ Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes.

Déterminer la loi de probabilité de Y .

Comme 0 à 2 clients peuvent se présenter en cinq minutes, il faut déterminer, dans ces trois cas, les probabilités pour que 0 , 1 ou 2 clients prennent de l'essence.

- Pour Y = 0 client achetant de l'essence :

Si personne ne se présente, $p_{C0}(Y = 0) = 1$.

Si une personne se présente, $p_{C1}(Y = 0) = p(\ \overline{e}\ ) = 0{,}3$.

Si 2 personnes se présentent, $p_{C2}(Y = 0) = p(\ \overline{e}\ ;\ \overline{e}\ ) = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$.

$p(Y = 0) = p(C_0) \times p_{C0}(Y = 0) + p(C_1) \times p_{C1}(Y = 0) + p(C_2) \times p_{C2}(Y = 0)$,

$p(Y = 0) = 0{,}1 \times 1 + 0{,}5 \times 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}09 = 0{,}286$.

- Pour Y = 1 client achetant de l'essence :

Si personne ne se présente, $p_{C0}(Y = 1) = 0$.

Si une personne se présente, $p_{C1}(Y = 1) = p(e) = 0{,}7$.

Si 2 personnes se présentent, $p_{C2}(Y = 1) = p(e\ ;\ \overline{e}\ ) + p(\ \overline{e}\ ;\ e) = 2 \times 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}42$.

$p(Y = 1) = p(C_0) \times p_{C0}(Y = 1) + p(C_1) \times p_{C1}(Y = 1) + p(C_2) \times p_{C2}(Y = 2)$,

$p(Y = 0) = 0{,}1 \times 0 + 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}4 \times 0{,}42 = 0{,}518$.

- Pour Y = 2 clients achetant de l'essence :

Si personne ne se présente, $p_{C0}(Y = 2) = 0$.

Si une personne se présente, $p_{C1}(Y = 2) = 0$.

Si 2 personnes se présentent, $p_{C2}(Y = 2) = p(e\ ;\ e) = 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}49$.

$p(Y = 2) = p(C_0) \times p_{C0}(Y = 2) + p(C_1) \times p_{C1}(Y = 2) + p(C_2) \times p_{C2}(Y = 2)$,

$p(Y = 0) = 0{,}1 \times 0 + 0{,}5 \times 0 + 0{,}4 \times 0{,}49 = 0{,}196$.

i	0	1	2
$p'_i = p(Y = i)$	0,286	0,518	0,196

On remarque : $\sum_{i=0}^{2} p'_i = 1$.