Une classe terminale comporte 30 élèves, dont 20 filles.

A chaque cours de mathématiques, le professeur de cette classe interroge un élève au hasard. D'un cours à l'autre, le professeur ne se rappelle pas de l'élève interrogé au cours précédent, ce qui fait qu'à chaque cours, le choix de l'élève par le professeur est indépendant des choix précédents.

1/ Quelle est la probabilité pour qu'à un cours donné, l'élève interrogé soit une fille ?

Soit F l'événement : "Une fille est l'élève interrogé lors d'un cours".

$p(F) = \dfrac{\textit{nb. cas favorables à } F}{\textit{nb. de cas possibles}} = \dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3}$.

2/ Soit n un entier positif ou nul.

On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de filles interrogées au cours de n cours de mathématiques consécutifs.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

n expériences successives *identiques* E : "interroger un élève parmi 30 ".

X = nombre de réalisations de F au cours des n expériences (Seuls F et $\overline{F}$ réalisables)

$p = \dfrac{2}{3}$, probabilité de réaliser F au cours d'une expérience unique.

$X = B(n\,;p)$. La variable aléatoire X suit une *Loi Binomiale* , de paramètres n et p .

b) Quelle est la probabilité que le nombre de filles interrogées soit égal à 4 durant 10 cours consécutifs ?

Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a : $p(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}$, probabilité de réaliser exactement k fois l'événement F au cours des n expériences.

$p(X=4) = \dbinom{10}{4} \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 \left(1-\dfrac{2}{3}\right)^{10-4} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 \left(\dfrac{1}{3}\right)^6 = 210\,\dfrac{2^4}{3^{10}} = \dfrac{1120}{19683} = 0{,}057$ par excès.

c) Quel doit être le minimum de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?

Pour n cours : $p(X=0) = \dbinom{n}{0} \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leq 0{,}001 \;\Rightarrow\; n \ln \dfrac{1}{3} \leq \ln(0{,}001) \;\Rightarrow\; n \ln \dfrac{1}{3} \leq \ln 10^{-3}$

$-n \ln 3 \leq -3 \ln 10 \;\Rightarrow\; n \ln 3 \geq 3 \ln 10 \;\Rightarrow\; n \geq \dfrac{3 \ln 10}{\ln 3}$ puisque $\ln 3 > 0$, soit $n \geq 6{,}29$.

Il faut au moins 7 cours consécutifs.

d) Durant un trimestre, il y a 36 cours de mathématiques. Quel nombre de filles interrogées peut-on espérer ?

L'espérance mathématique de la loi $B(n\,;p)$ est $E(X) = np = 36 \times \dfrac{2}{3} = 24$ filles interrogées.