Un jeu télévisé propose quatre questions à un candidat. Pour chacune de ces quatre questions l'animateur propose trois réponses possibles, une seule étant la réponse exacte.
Les questions posées lors du jeu sont indépendantes les unes des autres.
Un candidat retenu pour participer au jeu a une chance sur deux de connaître la réponse exacte à la question posée et, s'il ne connaît pas la réponse exacte, il répond au hasard.
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1/ L'animateur pose la première question au candidat.
On considère les évènements suivants :
***H*: "Le candidat choisit au hasard la réponse à la première question".**
***E*: "Le candidat répond correctement à la première question".**
a) Déterminer $p(H)$.

H (hasard) réalisé signifie que le candidat répond au hasard, donc qu'il ne connaît pas la réponse, donc : $p(H) = \frac{1}{2}$.

b) Sachant qu'un candidat répond au hasard à la première question, quelle est la probabilité qu'il réponde correctement ?

On cherche la probabilité de réaliser E (exact) , sachant H réalisé, noté $p(E/H)$ ou $p_H(E)$.

$p_H(E) = \frac{1}{3}$, puisqu'il n'existe qu'une réponse exacte pour trois réponses possibles.

En déduire $p(E \cap H)$.

<u>Remarque :</u> La probabilité de réaliser B sachant A déjà réalisé est notée $p_B(A)$ ou $p(B/A)$.

$E \cap H$ est l'évènement : "réaliser simultanément H et E" , soit "faire qu'il réponde au hasard puis que sa réponse soit bonne".

Il ne faut pas confondre cet évènement avec ${}_HE$, pour lequel on sait que le candidat a répondu au hasard, et où on demande que la réponse soit bonne : $p(E \cap H) = p(H) \times p_H(E) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

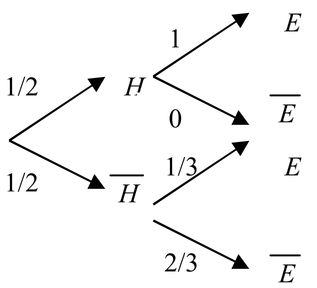
c) Calculer $p(E)$ (on pourra s'aider d'un arbre de probabilité).

Présentation théorique :

$p(E) = p[(H \cap E) \cup (\overline{H} \cap E)] = p(H \cap E) + p(\overline{H} \cap E)$, les évènements $H \cap E$ et $\overline{H} \cap E$ étant *incompatibles*.

$p(E) = p(H) \times p_H(E) + p(\overline{H}) \times p_{\overline{H}}(E) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Présentation en arbre :



$p(E) = p(H \cap E) + p(\overline{H} \cap E) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

d) Un candidat a répondu correctement à la première question. Quelle est la probabilité qu'il ait répondu au hasard à cette question ?

On cherche la probabilité qu'il ait répondu au hasard, sachant qu'il a répondu juste, soit $p_E(H)$.

On sait que $p(E \cap H) = p(E) \times p_E(H) = p(H) \times p_E(E)$, d'où : $p_E(H) = \dfrac{p(E \cap H)}{p(E)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{4}$.

2/ On admet que la probabilité qu'un candidat réponde correctement à une question est $\mathbf{\frac{2}{3}}$.

On note X le nombre de réponses exactes à l'issue des quatre questions.

a) Préciser la nature de la loi de probabilité de X et donner ses paramètres.

Le candidat subit $n = 4$ expériences *identiques* , pour lesquelles on note combien de réalisations de l'évènement E se réalisent, ou $\overline{E}$ ne se réalisent pas, avec $p = p(E) = \dfrac{2}{3}$.

X ne tient donc pas compte de l'ordre dans lequel les réponses exactes se produisent.

X suit une loi *binomiale* $B(n\,;p)$ de paramètres $n = 4$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

b) Quelle est la probabilité pour que le candidat réponde correctement aux quatre questions ?

$p(X = 4) = p(E\,,E\,,E\,,E) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{16}{81}$.

c) Quelle est la probabilité pour que le candidat donne au moins une réponse bonne ?

L'événement *contraire* de celui maintenant recherché est "ne donner aucune bonne réponse", d'où :

$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - p(\overline{E}\,,\overline{E}\,,\overline{E}\,,\overline{E}) = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = 1 - \dfrac{1}{81} = \dfrac{80}{81}$.