Un jeu consiste à tirer simultanément trois boules d'une urne contenant six boules blanches et quatre boules noires. On suppose tous les tirages équiprobables.

- **Si les trois boules tirées sont rouges, le joueur gagne 100 € ,**
- **Si exactement deux boules sont rouges, il gagne 15 € ,**
- **Si une seule boule est rouge, il gagne 4 € ,**
- **Si toutes les boules sont blanches, il ne gagne rien.**

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le gain en euros du jour, lors du jeu.

1/ Déterminer la loi de probabilité de X .

a) Sans utiliser la notion de Combinaison:

Un tirage "simultané" de trois boules équivaut à un tirege "successif" de trois boules, sous réserves qu'il n'y ait pas de *remise* dans l'urne de la boule tirée, entre chaque tirage, et que l'on ne tienne pas compte de l'ordre de tirage des boules (ce qui signifie que tous les ordres menant au résultat escompté sont valables).

$p(X = 100) = p(R , R , R) = p_1(R) \times p_2(R) \times p_3(R) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}$,

$p(X = 15) = p(R , R , B) + p(R , B , R) + p(B , R , R) = 3\, p(R , R , B) = 3\, p_1(R) \times p_2(R) \times p_3(B)$

$p(X = 15) = 3 \times \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{216}{720} = \frac{3}{10}$,

$p(X = 4) = p(R , B , B) + p(B , R , B) + p(B , B , R) = 3\, p(R , B , B) = 3\, p_1(R) \times p_2(B) \times p_3(B)$

$p(X = 4) = 3 \times \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{360}{720} = \frac{1}{2}$,

$p(X = 0) = p(B , B , B) = p_1(B) \times p_2(B) \times p_3(B) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$.

Pour ce dernier cas, on pouvait utiliser l'évènement *contraire* du reste :

$p(X = 0) = 1 - [p(X = 100) + p(X = 15) + p(X = 4)] = 1 - \frac{600}{720} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$.

b) En utilisant les Combinaisons :

$p(X = 100) = p\{3R\} = p\{3R,\, 0B\} = \frac{\binom{4}{3} \times \binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 \times 1}{120} = \frac{1}{30}$,

$p(X = 15) = p\{2R ,\, 1B\} = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{6 \times 6}{120} = \frac{3}{10}$, $p(X = 4) = p\{1R ,\, 2B\} = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 \times 15}{120} = \frac{1}{2}$,

$p(X = 0) = p\{3B\} = p\{0R ,\, 3B\} = \frac{\binom{4}{0} \times \binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1 \times 20}{120} = \frac{1}{6}$,

On obtient la loi de probabilité de X (2 colonnes, celle des valeurs de x et celle de leurs probabilités)

Loi de probabilité de X

x_i	p_i
100	1/30
15	9/30
4	15/30
0	5/30
	***S* = 1**

Calcul de l'espérance E(X)

x_i	p_i	p_ix_i
100	1/30	100/30
15	9/30	135/30
4	15/30	60/30
0	5/30	0
	1	***S* = 295/30**

$E(X) = \sum_{i=1}^{4} p_ix_i = S = \frac{295}{30} \approx 9{,}83$ € par défaut.

2/ Pour jouer une fois, la mise est de 10 € . Compte tenu de cette mise initiale, le jeu est-il favorable au joueur ?

Le joueur misant 10€ pour débuter le jeu, le jeu n'est pas équitable, puisque $E(X) < 10$ € , ce qui ne saurait surprendre.

Le gain moyen de l'organisateur est : $G_1 = 10 - 9{,}83 = 0{,}17$ € .

3/ L'organisateur trouvant le jeu insuffisamment rentable, il envisage deux solutions :

- **Soit, augmenter la mise de 1 € , en la faisant passer à 11 € ,**
- **Soit de diminuer chaque gain de 1 € , les faisant respectivement passer à 99, 14 et 3 € .**

Quelle solution est la plus rentable pour l'organisateur ?

a) Mise de 11 € :

Le gain moyen de l'organisateur devient $G_2 = 11 - E(X) = 1 + G_1 = 1{,}17$ € par jeu.

b) Diminution des gains de 1€ :

Les gains du joueur baissent de 1 € , soit $y_i = x_i - 1$, sauf dans le cas du gain nul. Les probabilités de chacun de ces cas ne changent pas.

y_i	p_i	p_ix_i
99	1/30	99/30
13	9/30	117/30
3	15/30	45/30
0	5/30	0
	1	***S'* = 261/30**

$E(Y) = \sum_{i=1}^{4} p_iy_i = S' = \frac{261}{30} \approx 8{,}70$ € .

Le joueur misant 10€ pour débuter le jeu, le gain moyen de l'organisateur est : $G_3 = 10 - 8{,}70 = 1{,}30$ € .

Ce dernier cas est le plus rentable pour l'organisateur.