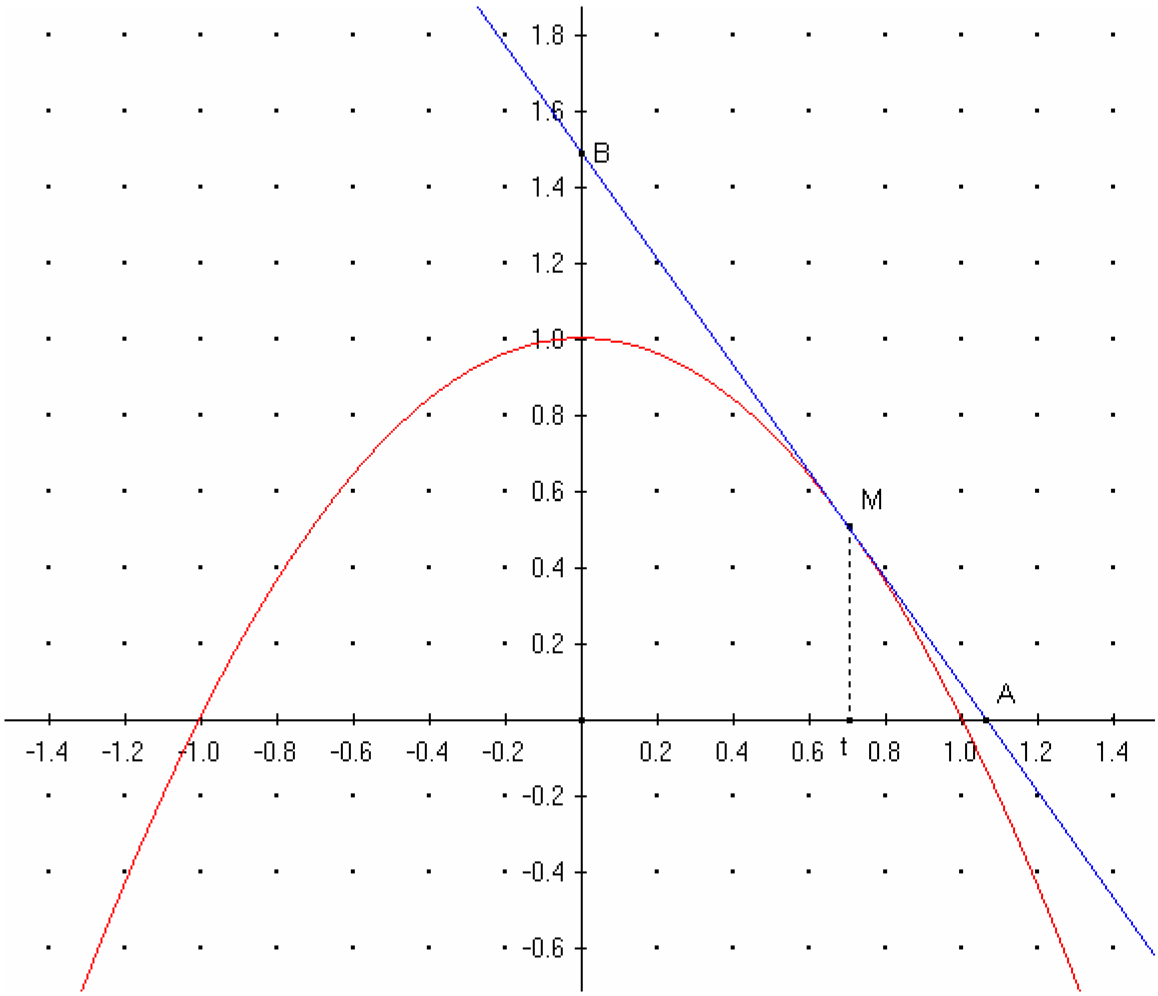
Soit un nombre réel t appartenant à l'intervalle]0 ; 1[, et le point M, d'abscisse t, appartenant à la parabole d'équation $y = 1 - x^2$.
La tangente en M à cette parabole coupe l'axe des abscisses en A et celui des ordonnées en B .
Déterminer t pour que l'aire du triangle AOB soit minimale.

On considèrera que l'élève sait tracer la parabole $y = 1 - x^2$, sans en faire l'étude fonctionnelle.
Son sommet est le point $S(0 ; 1)$.
Elle est symétrique par rapport à l'axe $y'y$, avec des branches paraboliques vers le bas. Elle coupe l'axe $x'x$ aux points $C(-1 ; 0)$ et $D(0 ; 1)$.



Equation de la tangente en M :
Soit $f(x) = 1 - x^2$, d'où $f'(x) = -2x$.
La tangente en M a pour équation : $y - f(t) = f'(t)(x - t) \Leftrightarrow y - (1 - t^2) = -2t(x - t)$.
On obtient la droite T_t : $y = -2tx + (1 + t^2)$, l'abscisse t du point M servant de paramètre.

L'intersection A de la tangente avec l'axe des abscisses vérifie $\left\{ \begin{array}{c} y = 0 \\ y = -2tx + (1 + t^2) \end{array} \right\}$, soit $-2tx + (1 + t^2) = 0$.

On déduit $x_A = \dfrac{1 + t^2}{2t}$, donc un point $A\ (0 ; \dfrac{1 + t^2}{2t})$.

L'intersection B de la tangente avec l'axe des ordonnées vérifie $\left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ y = -2tx + (1 + t^2) \end{array} \right\}$, soit $y_B = 1 + t^2$.

On déduit le point $B\ (1 + t^2 ; 0)$.

On remarquera que $0 < t < 1 \Rightarrow OA = x_A > 0$ et $OB = y_B > 0$.

L'aire du triangle rectangle OAB est $A(t) = \dfrac{OA \times OB}{2} = \dfrac{(1 + t^2)^2}{4t} = \dfrac{1}{4}\dfrac{(1 + t^2)^2}{t}$.

Cette fonction continue lorsque t varie sur $]0 ; 1[$.

elle admet pour dérivée : $A'(t) = \dfrac{u'v - v'u}{v^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{2(1 + t^2)(2t)t - 1(1 + t^2)^2}{t^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{(1 + t^2)[4t^2 - (1 + t^2)]}{t^2}$.

$A'(t) = \dfrac{(1 + t)^2(3t^2 - 1)}{4t^2} = \dfrac{(1 + t^2)(t\sqrt{3} + 1)(t\sqrt{3} - 1)}{4t^2}$.

$0 < t < 1 \Rightarrow \dfrac{(1 + t^2)(t\sqrt{3} + 1)}{4t^2} > 0$, donc $A'(t)$ est du signe de $t\sqrt{3} - 1$.

$A'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577$.

t	0		$\sqrt{3}/3$		1
$A'(t)$		$-$	0	$+$	
$A(t)$		$\searrow$	$2/3$	$\nearrow$	

L'aire du triangle AOB est minimum pour $t = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, soit $M(t ; 1 - t^2) = (\dfrac{\sqrt{3}}{3} ; \dfrac{2}{3})$.