Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ pour tout x réel.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1-a) Etudier les variations de f.

f est définie sur $\mathbb{R}$, puisque $e^x + 1 > 0$ pour tout x réel. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme rapport de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, soit : $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x + 1) - e^x.e^x}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	+1

b) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

On sait $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{0}{1} = 0$ (Asymptote horizontale $y = 0$).

On sait $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = 1$ puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

(Asymptote horizontale $y = 1$).

2/ Soit A le point de coordonnées $(0 ; \frac{1}{2})$. Prouver que A est centre de symétrie de C.

$A(a ; b)$ centre de symétrie de $C \Leftrightarrow f(2a - x) + f(x) = 2b$, pour tout x réel.

$f(2a - x) + f(x) = f(-x) + f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} + \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1} + \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{1}{1 + e^x} + \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{e^x + 1}{e^x + 1} = 1 = 2b$.

Le point $A(0 ; \frac{1}{2})$ est bien centre de symétrie de C.

3-a) Déterminer une équation de la tangente T à C au point A.

$T_a :\ y - f(a) = f'(a)(x-a) \Rightarrow y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x$, soit $T:\ y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$.

b) Préciser les positions relatives de C et T lorsque x varie dans $\mathbb{R}$ (on pourra étudier le sens de variation et le signe d'une fonction à préciser).

On étudie l'écart *algébrique* entre C et T, exprimé par : $E(x) = f(x) - (\frac{x}{4} + \frac{1}{2})$.

La fonction $E(x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$E'(x) = f'(x) - \frac{1}{4} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} - \frac{1}{4} = \frac{4e^x - (e^x+1)^2}{4(e^x+1)^2} = \frac{4e^x - e^{2x} - 2e^x - 1}{4(e^x+1)^2} = -\frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{4(e^x+1)^2} = -\frac{(e^x-1)^2}{4(e^x+1)^2}$.

On constate $E'(x) < 0$ pour tout x réel, bien que nulle en $x = 0$ $(e^x = 1)$.

D'où le tableau de signe de $E(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$E'(x)$		$-$	0	$-$	0
$E(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$
		$E(x) > 0$ T sous C	0	$E(x) < 0$ C sous T	

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} E(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - (\frac{x}{4}+\frac{1}{2})\right] = +\infty$, ce qui prouve que $E(x) > 0$ sur l 'intervalle $]-\infty\ ;0[$, donc que C est au-dessus de T.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} E(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (\frac{x}{4}+\frac{1}{2})\right] = -\infty$, ce qui prouve que $E(x) < 0$ sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$, donc que C est au-dessous de T.

4/ Tracer la courbe représentative C.