La suite (u_n) est définie par les relations suivantes :

$u_0 = 1$, $u_1 = 8$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, $u_n = 4(u_{n-1} - u_{n-2})$.

1/ Montrer que la suite (v_n) définie par $u_n = 2^n.v_n$ vérifie, pour tout entier naturel $n \geq 2$,

la relation : $v_n - v_{n-1} = v_{n-1} - v_{n-2}$.

$u_n = 4(u_{n-1} - u_{n-2}) \Leftrightarrow 2^n.v_n = 4(2^{n-1}.v_{n-1} - 2^{n-2}.v_{n-2}) \Leftrightarrow 2^n.v_n = 2^{n+1}.v_{n-1} - 2^n.v_n$.

On divise les deux membres par 2^n : $v_n = 2.v_{n-1} - v_{n-2} \Leftrightarrow v_n - v_{n-1} = v_{n-1} - v_{n-2}$.

En déduire que la suite (v_n) est arithmétique. En préciser la raison et le premier terme.

La relation démontrée au 1/ prouve, par *héritage*, que la différence entre deux termes consécutifs de la suite numérique (v_n) est constante, ce qui est la caractéristique des suites *arithmétiques* .

$v_n - v_{n-1} = v_{n-1} - v_{n-2} = \ldots = v_1 - v_0 = \dfrac{u_1}{2} - u_0 = 4 - 1 = 3 = r$, raison de la suite (v_n) .

On a vu, au passage, que : $u_0 = 2^0.v_0 = 1 \Rightarrow v_0 = 1$, premier terme de la suite (v_n) .

2/ Déterminer le terme général de la suite (v_n) , puis celui de la suite (u_n) .

Deux termes quelconques d'une suite arithmétique (v_n) sont reliés par la relation : $v_n = v_p + (n - p).r$.

$v_n = v_0 + n.r \Rightarrow v_n = 1 + 3n$, pour tout entier naturel n .

$u_n = 2^n.v_n \Rightarrow u_n = (3n + 1).2^n$, pour tout entier naturel n .

3/ Montrer que $\sum\limits_{p=0}^{n} u_p = 4u_{n-1} + 5$.

$u_p = 4(u_{p-1} - u_{p-2})$ n'est utilisable que pour $n \geq 2$:

$$u_p = 4(u_{p-1} - u_{p-2}) \Rightarrow \sum_{p=2}^{n} u_p = 4\left(\sum_{p=2}^{n} u_{p-1} - \sum_{p=2}^{n} u_{p-2}\right) \Rightarrow \sum_{p=2}^{n} u_p = 4\left(\sum_{p=2}^{n} u_{p-1} - \sum_{p=1}^{n-1} u_{p-1}\right)$$

$$\sum_{p=2}^{n} u_p = 4\left(\left(\sum_{p=2}^{n-1} u_{p-1} + u_{n-1}\right) - \left(u_0 + \sum_{p=2}^{n-1} u_{p-1}\right)\right) = 4\,(u_{n-1} - u_0) .$$

$$\sum_{p=0}^{n} u_p = u_0 + u_1 + \sum_{p=2}^{n} u_p = u_0 + u_1 + 4\,(u_{n-1} - u_0) = 4u_{n-1} + u_1 - 3u_0 = 4u_{n-1} + 5 .$$

En déduire, en fonction de n , l'expression de $\sum\limits_{p=0}^{n} u_p$.

$u_n = (3n + 1).2^n \Rightarrow u_{n-1} = [3(n-1) + 1].2^{n-1} = (3n - 2).2^{n-1}$.

$$\sum_{p=0}^{n} u_p = 4u_{n-1} + 5 = 4(3n - 2).2^{n-1} + 5 \Rightarrow \sum_{p=0}^{n} u_p = (3n - 2).2^{n+1} + 5 .$$

On peut vérifier par le calcul de quelques termes : $u_2 = 4(u_1 - u_0) = 28$ et $u_3 = 4(u_2 - u_1) = 80$.

$$\sum_{p=0}^{3} u_p = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 117 \quad \text{tandis que} \quad \sum_{p=0}^{3} u_p = (3\times 3 - 2).2^{3+1} + 5 = 7\times 16 + 5 = 117.$$