On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{N}\ ,\ u_0 \geq 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3\ ,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1/ Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 3$, est une suite géométrique.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = (2u_n - 3) - 3 = 2(u_n - 3)$, soit : $v_{n+1} = 2v_n$.

La suite (v_n) est géométrique, de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3$.

En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n .

$v_n = v_0\, q^n \Rightarrow v_n = 2^n(u_0 - 3)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$v_n = u_n - 3 \Leftrightarrow u_n = v_n + 3$, soit : $u_n = 2^n(u_0 - 3) + 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On peut remarquer que $u_0 \geq 4 \Rightarrow u_n \geq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2/ Déterminer les nombres entiers u_0 tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3^{u_n} soit le cube d'un entier naturel.

On veut, pour tout $\in \mathbb{N}$: $3^{u_n} = K^3$, avec $K \in \mathbb{N}$.

3^{u_n} est une puissance entière du nombre premier 3 , donc n'est divisible que par des puissances de 3 , ce qui impose $K^3 = (3^k)^3 = 3^{3k}$, avec $k \in \mathbb{N}$.

$3^{u_n} = 3^{3k} \Rightarrow u_n = 3k$ ou $2^n(u_0 - 3) + 3 = 3k$, soit $2^n(u_0 - 3)$ multiple de 3 .

3 nombre premier, ne peut diviser 2^n , donc 3 doit diviser $u_0 - 3 \Rightarrow u_0 = 3k'$, avec $k' \in \mathbb{N} - \{0\ ,\ 1\}$.

3/ Soit $u_0 = 4$. Déterminer toutes les valeurs entières de n telles que $3^{u_n} - 1$ soit un multiple de 11 .

$u_0 = 4 \Rightarrow u_n = 2^n + 3$.

Recherchons le cycle des congruences des puissances de 3 , modulo 11 .

$3^1 \equiv 3\ [11] \Rightarrow 3^2 \equiv 9[11] \Rightarrow 3^3 \equiv 5[11] \Rightarrow 3^4 \equiv 4\ [11] \Rightarrow 3^5 \equiv 1\ [11]$.

$3^{u_n} - 1 \equiv 0[11] \Leftrightarrow 3^{u_n} \equiv 1\ [11]$ ce qui impose u_n multiple de 5 .

Sachant $u_n = 2^n + 3$, $u_n \equiv 0[5] \Rightarrow 2^n + 3 \equiv 0[5] \Rightarrow 2^n \equiv 2[5]$.

Recherchons le cycle des congruences des puissances de 2 , modulo 5 .

$2^1 \equiv 2[5] \Rightarrow 2^2 \equiv 4[5] \Rightarrow 2^3 \equiv 3[5] \Rightarrow 2^4 \equiv 1[5]$.

$2^n \equiv 2[5]$ impose $n = 4k + 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$.