Solution – Problème – Second Degré – s3382

Soit deux triangles équilatéraux T_1 et T_2, d'aires respectives S_1 et S_2, dont le périmètre total est constant, égal à L.
Déterminer en fonction de L la plus petite valeur que puisse prendre $S_1 + S_2$.

Méthode rapide :
Les deux triangles ont des rôles identiques dans l'énoncé, donc si les longueurs de leurs côtés étaient différentes, l'inversion des rôles amènerait à une absurdité.

On conclue que les deux triangles équilatéraux sont égaux, de côté $a = \frac{L}{6}$.

$S_1 = S_2 = \frac{B \times h}{2} = \frac{1}{2} a \times a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{L^2\sqrt{3}}{144}$, soit : $S_1 + S_2 = \frac{L^2\sqrt{3}}{72}$, somme minimum des aires.

Méthode détaillée :
Soit a la longueur du côté de T_1 et b celle du côté de T_2.

$3a + 3b = L$, soit : $a + b = \frac{L}{3} \Leftrightarrow b = \frac{L}{3} - a$.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \frac{B \times h}{2} = \frac{1}{2} a \times a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ S_2 = \frac{B \times h}{2} = \frac{1}{2} b \times b \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}[a^2 + (\frac{L}{3} - a)^2].$$

$S_1 + S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(2a^2 - \frac{2L}{3} a + \frac{L^2}{9}]$.

Cette somme des aires sera minimale lorsque $f(a) = 2a^2 - \frac{2L}{3} a + \frac{L^2}{9}$ le sera.

$f'(a) = 4a - \frac{2L}{3} \Rightarrow f'(a) = 0$ pour $a = \frac{L}{6}$, abscisse du minimum de la fonction.

Remarque : On peut aussi savoir que la parabole $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) admet un sommet, en l'occurrence un minimum en : $x = -\frac{b}{2a} = \frac{L}{6}$.

En reportant dans $S_1 + S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(2a^2 - \frac{2L}{3} a + \frac{L^2}{9}]$, on obtient :

$S_1 + S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{L^2}{18} - \frac{L^2}{9} + \frac{L^2}{9}) = \frac{L^2\sqrt{3}}{72}$, somme minimum des aires.