Factorisation d'un polynôme par $x - a$:

1/ Soit α un réel et P un polynôme. Démontrer que si, pour tout réel x, $P(x) = (x - \alpha) \times Q(x)$, où Q est un polynôme, alors α est une racine de P.

$P(x) = (x - \alpha) \times Q(x) \Rightarrow P(\alpha) = (\alpha - \alpha) \times Q(\alpha) = 0 \times Q(\alpha) = 0$.

$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha$ racine de P.

2/ On se propose d'établir la réciproque.

a) Soit p un entier naturel non nul. Démontrer que, pour tous réels x et y, on a :

$$(x - y)(x^{p-1} + yx^{p-2} + y^2x^{p-3} + \ldots. + y^{p-3}x^2 + y^{p-2}x + y^{p-1}) = x^p - y^p .$$

$\times x$	x^p	yx^{p-1}	y^2x^{p-2}	….	$y^{p-3}x^3$	$y^{p-2}x^2$	$y^{p-1}x$	
$\times y$		yx^{p-1}	y^2x^{p-2}	y^3x^{p-3}	…	$y^{p-2}x^2$	$y^{p-1}x$	y^p
différence	x^p	0	0	0	0	0	0	$-y^p$

On a supposé que le processus se reproduisait à l'identique pour chaque produit (ceux dans les …) et on remarquera que pour chaque facteur du produit le *degré global* en xy du produit est p :

Ainsi : $x^p \to p$; $y^1 x^{p-1} \to 1 + p - 1 = p$; …. ; $y^{p-3}x^3 \to p - 3 + 3 = p$ …

Conclusion : $(x - y)(x^{p-1} + yx^{p-2} + y^2x^{p-3} + \ldots. + y^{p-3}x^2 + y^{p-2}x + y^{p-1}) = x^p - y^p$.

Une démonstration "correcte" nécessiterait d'être faite *par récurrence*, pour éviter de devoir "supposer" le phénomène répétitif dans les "…" , même si cela semble une évidence

b) On suppose : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, et α est une racine de P.

Ecrire l'égalité vérifiée par α.

$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + a_{n-2} \alpha^{n-2} + \ldots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0$.

Calculer $P(x) - P(\alpha)$ et montrer que $x - \alpha$ est un facteur commun dans $P(x) - P(\alpha)$ (On utilisera l'égalité de la question a) avec $p = 1, p = 2, p = 3$ …).

$P(x) - P(\alpha) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) - (a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 \alpha + a_0)$.

$P(x) - P(\alpha) = a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - y^{n-1}) + a_{n-2}(x^{n-2} - y^{n-2}) + \ldots + a_2(x^2 - y^2) + a_1(x - y)$.

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = (x - y) \times Q_1(x)$, toujours degré global 1 au second facteur,

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + yx + y^2) = (x - y) \times Q_2(x)$, toujours degré global 2 au second facteur,

$x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + yx^2 + y^2x + y^3) = = (x - y) \times Q_3(x)$, toujours degré global 3 au second facteur,

…..

$x^n - y^n = (x - y)(x^{p-1} + yx^{p-2} + y^2x^{p-3} + \ldots. + y^{p-3}x^2 + y^{p-2}x + y^{p-1}) = (x - y) \times Q_n(x)$, toujours degré global n au second facteur.

La factorisation de $x - y$ donne :

$P(x) - P(\alpha) = (x - y)[a_nQ_n(x) + a_{n-1}Q_{n-1}(x) + a_{n-2}Q_{n-2}(x) + \ldots + a_2Q_2(x) + a_1] = (x - y) \times Q(x)$, avec :

$Q(x) = a_nQ_n(x) + a_{n-1}Q_{n-1}(x) + a_{n-2}Q_{n-2}(x) + \ldots + a_2Q_2(x) + a_1$.

$Q(x)$, somme de polynômes, est lui-même un polynôme.

c) En déduire que $P(x)$ est divisible par $x - \alpha$.

$P(x) - P(\alpha) = P(x)$ puisque $P(\alpha) = 0$.

On conclue : $P(x) = (x - y) \times Q(x)$, ce qui prouve que $P(x)$ est divisible par $x - y$.

3/ *Application* :

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = 4x^3 - 16x^2 + 13x - 3$.

Calculer $P(3)$.

$P(3) = 4 \times 3^3 - 16 \times 3^2 + 13 \times 3 - 3 = 4 \times 27 - 16 \times 9 + 13 \times 3 - 3 = 144 - 144 = 0$.

En déduire une factorisation de $P(x)$, puis résoudre l'équation $P(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

$P(x) = P(x) - P(3) = (4x^3 - 16x^2 + 13x - 3) - (4 \times 3^3 - 16 \times 3^2 + 13 \times 3 - 3)$,

$P(x) = 4(x^3 - 3^3) - 16(x^2 - 3^2) + 13(x - 3)$,

$x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$,

$x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + x\times3 + 3^2) = = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$.

On déduit :

$P(x) = 4(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - 16(x - 3)(x + 3) + 13(x - 3)$,

$P(x) = (x - 3)[4(x^2 + 3x + 9) - 16(x + 3) + 13] = (x - 3)(4x^2 - 4x + 1) = (x - 3)(2x - 1)^2$.

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.

On remarquera que la racine $\alpha = \dfrac{1}{2}$ apparaît dans deux facteurs : $(2x - 1)(2x - 1)$. On dit qu'il s'agit d'une *racine double* , tandis que $\beta = 3$ n'apparaît que dans un seul facteur $x - 3$. Il s'agit d'une *racine simple* .