Les fonctions u , v et w sont respectivement définies sur les intervalles [-2 ; 4] ,]0 ; +∞[et ℝ , par :

$u : x \to u(x) = x + 3$ $\quad$ $v : x \to v(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $w : x \to w(x) = 2 - 7x$.

1/ On pose : $f = w \circ v \circ u$.

Vérifier que f est définie sur [-2 ; 4] et calculer $f(x)$.

$$x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{v} v[(u(x)] \xrightarrow{w} w[v[u(x)]] = f(x)$$

$-2 \le x \le 4 \Rightarrow 1 \le x + 3 \le 7$, soit $1 \le u(x) \le 7$. On constate que $u(x) \in \,]0 ; +\infty[$, donc appartient toujours au domaine de définition de v .

$1 \le u(x) \le 7 \Rightarrow \dfrac{1}{7} \le v[u(x)] \le 1$ (la fonction « prendre l'inverse » est décroissante, donc inverse les ordres).

$v[u(x)] \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in [-2 ; 4]$, donc $w[v[u(x)]]$ est toujours calculable lorsque $x \in [-2 ; 4]$.

f est bien définie sur [-2 ; 4] .

$$f(x) = (w \circ v \circ u)(x) = (w \circ v)[u(x)] = (w \circ v)(x + 3) = w[v(x + 3)] = w\left(\frac{1}{x+3}\right) = 2 - 7\left(\frac{1}{x+3}\right) = 1 - \frac{7}{x+3} = \frac{x-4}{x+3} .$$

2/ Etudier le sens de variation de f sur [-2 ; 4] .

La fonction affine u est croissante sur [-2 ; 4] , car son coefficient directeur $a = +1$ est positif.

Elle conserve donc les ordres :

$-2 \le x_1 \le x_2 \le 4 \Leftrightarrow 1 \le x_1 + 3 \le x_2 + 3 \le 7 \Leftrightarrow 1 \le u(x_1) \le u(x_2) \le 7$.

La fonction « prendre l'inverse » est décroissante sur] 0 ; +∞ [, donc inverse les ordres :

$1 \le u(x_1) \le u(x_2) \le 7 \Leftrightarrow \dfrac{1}{7} \le \dfrac{1}{u(x_2)} \le \dfrac{1}{u(x_1)} \le \dfrac{1}{1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{7} \le (v \circ u)(x_2) \le (v \circ u)(x_1) \le 1$.

La fonction affine w est décroissante sur ℝ , car son coefficient directeur $a = -7$ est négatif.

Elle inverse donc les ordres :

$\dfrac{1}{7} \le (v \circ u)(x_2) \le (v \circ u)(x_1) \le 1 \Leftrightarrow 2 - 7\times 1 \le (w \circ v \circ u)(x_1) \le (w \circ v \circ u)(x_1) \le 2 - 7\times\dfrac{1}{7} \Leftrightarrow -5 \le f(x_1) \le f(x_2) \le 1$.

On conclue : $-2 \le x_1 \le x_2 \le 4 \Rightarrow -5 \le f(x_1) \le f(x_2) \le 1$. La fonction f est croissante sur [-2 ; 4] .

3/ Encadrer $f(x)$ sur [-2 ; 4] .

La méthode précédente a simultanément prouvé que : $-2 \le x \le 4 \Rightarrow -5 \le f(x) \le 1$.