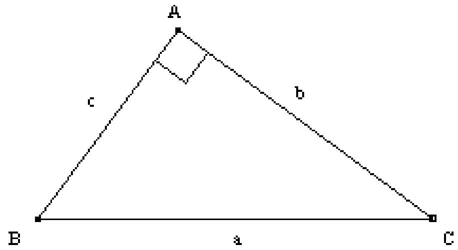
Déterminer les longueurs des côtés d'un triangle rectangle dont l'aire est égale à 60 et le périmètre à 40 .



Un triangle rectangle est égal à la moitié d'un rectangle, donc l'aire est : $A = \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{bc}{2} = 60$.

Soit : $bc = 120$.

Son périmètre est $p = BC + AC + AB = a + b + c = 40$.

Enfin, d'après le Théorème de Pythagore : $AB^2 + AC^2 = BC^2$, soit : $b^2 + c^2 = a^2$.

On obtient trois équations, qui devraient permettre de déterminer a, b, c : $\begin{cases} a + b + c = 40 \\ bc = 120 \\ b^2 + c^2 = a^2 \end{cases}$.

Il existe de multiples présentations de la solution. Par exemple :

$b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow b^2 + 2\,ac + c^2 = a^2 + 2ac \Leftrightarrow (b + c)^2 = a^2 + 240$.

$a + b + c = 40 \Leftrightarrow b + c = 40 - a$.

On reporte ce résultat dans l'équation précédente :

$(b + c)^2 = a^2 + 240 \Leftrightarrow (40 - a)^2 = a^2 + 240 \Leftrightarrow 1600 - 80a + a^2 = a^2 + 240 \Leftrightarrow 80a = 1360 \Leftrightarrow a = 17$.

Le système initial se résume alors à : $\begin{cases} b + c = 23 \\ bc = 120 \end{cases}$.

Méthode 1 :

On peut savoir que : « Deux nombres de somme S et produit P sont solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ » .

b et c sont donc les racines de : $X^2 - 23X + 120 = 0$.

$\Delta = 23^2 - 4 \times 120 = 49 \Rightarrow X_1 = \dfrac{23 + 7}{2} = 15$ et $X_2 = \dfrac{23 - 7}{2} = 8$.

Il existe deux triplets solutions : $(a ; b ; c) = (17 ; 15 ; 8)$ ou $(a ; b ; c) = (17 ; 8 ; 15)$.

Méthode 2 :

$b + c = 23 \Leftrightarrow c = 23 - b$, qu'on reporte dans $bc = 120$.

$b(23 - b) = 120 \Leftrightarrow b^2 - 23b + 120 = 0$.

On retrouve l'équation du second degré précédente : $\begin{cases} b = 15 \Rightarrow c = 23 - b = 8 \\ b = 8 \Rightarrow c = 23 - b = 15 \end{cases}$.

Les triplets solutions sont évidemment identiques.