

Résoudre le système suivant $\begin{cases} 4x^3 + 4xy^2 - 14x - 6 = 0 \\ 4y^3 + 4x^2y - 14y + 12 = 0 \end{cases}$.

Posons $t = \frac{y}{x}$, soit $y = tx$.

Le système devient :

$$\begin{cases} 4x^3 + 4t^2x^3 - 14x - 6 = 0 \\ 4t^3x^3 + 4tx^3 - 14tx + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(1+t^2)x^3 - 14x - 6 = 0 \\ 4t(t^2+1)x^3 - 14tx + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t(1+t^2)x^3 - 14tx - 6t = 0 \\ 4t(1+t^2)x^3 - 14tx + 12 = 0 \end{cases}$$

Par soustraction, on obtient : $6t - 12 = 0$, soit $t = 2 \Leftrightarrow y = 2x$, que l'on reporte dans la première équation :

$$4x^3 + 4xy^2 - 14x - 6 = 0 \Rightarrow 4x^3 + 16x^3 - 14x - 6 = 0, \text{ soit : } 10x^3 - 7x - 3 = 0.$$

$x = 1$ étant racine évidente, on peut factoriser $x - 1$: $10x^3 - 7x - 3 = (x - 1)(10x^2 + 10x + 3)$.

$10x^2 + 10x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 100 - 120 < 0$. Pas d'autre racine.

Il existe un couple solution unique : $(x ; y) = (1 ; 2)$.