Soit le polynôme $P(x) = 4x^3 - 2x^2 - 10x - 4$.

1/ Vérifier que $a = 2$ est racine du polynôme.

$P(2) = 4.2^3 - 2.2^2 - 10.2 - 4 = 4.8 - 2.4 - 10.2 - 4 = 32 - 8 - 20 - 4 = 0$.

2/ En déduire la factoristion de $P(x)$ en un produit de facteurs du premier degré.

Un polynôme nul en $x = a$ admet la factorisation de $x - a$.

Déterminons la factorisation de $x - 2$ par *identification* :

Soit $P(x) = 4x^3 - 2x^2 - 10x - 4 = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$, pour tout x réel.

$P(x) = 4x^3 - 2x^2 - 10x - 4 = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$, pour tout x réel.

Deux polynômes partout égaux (*identiques*) ont même coefficient à chaque puissance de x :

$$\left\{\begin{array}{c} a = 4 \\ b - 2a = -2 \\ c - 2b = -10 \\ -2c = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a = 4 \\ b = 6 \\ c = 2 \end{array}\right\}$$ à partir des équations 1, 2, 4 .

L'équation 3 ne doit pas être négligée, mais on constate bien qu'elle est vérifiée.

On obtient : $P(x) = (x - 2)(4x^2 + 6x + 2) = 2(x - 2)(2x^2 + 3x + 1)$.

Recherchons la factorisation, si elle existe, de $Q(x) = 2x^2 + 3x + 1$:

$2x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1$.

Les racines sont $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 + 1}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 - 1}{4} = -1$.

Un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ de racines α et β , se factorise sous la forme $a(x - \alpha)(x - \beta)$.

$2x^2 + 3x + 1 = 2(x + \dfrac{1}{2})(x + 1) = (2x + 1)(x + 1)$.

Autre Méthode :

Soit $Q(x) = 2x^2 + 3x + 1$.

On remarque que $Q(-1) = 2(-1)^2 + 3(-1) + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$.

Le binôme $x + 1$ se factorise donc dans $Q(x)$.

$Q(x) = 2x^2 + 3x + 1 = (x + 1)(ax + b) = ax^2 + (a + b)x + b$, pour tout x réel.

Par *identification* on déduit : $\left\{\begin{array}{c} a = 2 \\ a + b = 3 \\ b = 1 \end{array}\right\}$, soit $\left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array}\right.$.

On retrouve la factorisation : $Q(x) = 2x^2 + 3x + 1 = (2x + 1)(x + 1)$.

En conclusion : $P(x) = 2(x - 2)Q(x) = 2(x - 2)(x + 1)(2x + 1)$.

3/ Résoudre $P(x) = 0$.

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1)(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = +2 \\ x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \\ 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

$S = \{ -1 ; -\dfrac{1}{2} ; +2 \}$.