Solution – Inéquations du Second Degré – s3139

1/ Résoudre l'inéquation : $12x^2 - 8x + 6 > 9x$.

$12x^2 - 8x + 6 > 9x \Leftrightarrow 12x^2 - 17x + 6 > 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{17}{12}x + \frac{1}{2} > 0$.

Utilisons la forme canonique :

$$x^2 - \frac{17}{12}x + \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{17}{12}x + \left(\frac{17}{24}\right)^2 - \left(\frac{17}{24}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \left[x^2 - \frac{17}{12}x + \left(\frac{17}{24}\right)^2\right] - \frac{1}{576} > 0 .$$

$$\left(x - \frac{17}{24}\right)^2 - \left(\frac{1}{24}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{17}{24} - \frac{1}{24}\right)\left(x - \frac{17}{24} + \frac{1}{24}\right) > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) > 0 .$$

x	$-\infty$		3/4		3/2		$+\infty$
$x - \frac{3}{4}$		–	0	+	|	+	
$x - \frac{3}{2}$		–	|	–	0	+	
P		**+**	**0**	**–**	**0**	**+**	

$S =]-\infty\ ;\ +\frac{3}{4}[\ \cup\ ]+\frac{3}{2}\ ;\ +\infty\ [$.

2/ Pour quelles valeurs du coefficient c a-t-on $x^2 + 4x + c > 0$, pour tout x réel ?

Procédons de même :

$x^2 + 4x + c > 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4) - 4 + c > 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + c - 4 > 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 > 4 - c$.

L'expression $(x + 2)^2$ est strictement positive si $x \neq -1$, et nulle pour $x = -2$.

Pour que $(x + 2)^2 > 4 - c$ soit vrai pour tout x réel, il faut donc que $4 - c$ soit strictement négatif :

$4 - c < 0 \Leftrightarrow c > 4$.

On peut également raisonner à partir des courbes représentatives des trinômes du second degré, les paraboles :

$f(x) = x^2 + 4x + c$ admettant $a = 1$ comme coefficient de x^2 , a ses branches orientées vers le haut.

Pour que $f(x)$ soit *toujours* positif, il suffit que la parabole ne coupe pas l'axe $x'x$, donc que $f(x) = 0$ n'admette pas de racine, donc que le discriminant de $x^2 + 4x + c = 0$ soit strictement négatif :

$x^2 + 4x + c = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4c = 4(4 - c)$.

$\Delta < 0 \Leftrightarrow 4 - c < 0 \Leftrightarrow c > 4$, comme trouvé précédemment.