Soit la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et $3u_{n+1} + 2u_n = -\dfrac{5n+7}{(n+1)(n+2)}$, pour tout entier naturel n.

1/ Soit la suite (w_n) telle que $w_n = u_n + \dfrac{1}{n+1}$, pour tout entier naturel n.

Montrer que (w_n) est une suite géométrique, dont on déterminera la raison q et le premier terme w_0.

$w_n = u_n + \dfrac{1}{n+1} \Leftrightarrow u_n = w_n - \dfrac{1}{n+1}$.

On déduit : $3u_{n+1} + 2u_n = -\dfrac{5n+7}{(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow 3\left(w_{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right) + 2\left(w_n - \dfrac{1}{n+1}\right) = -\dfrac{5n+7}{(n+1)(n+2)}$,

$3w_{n+1} + 2w_n = -\dfrac{5n+7}{(n+1)(n+2)} + \dfrac{3}{n+2} + \dfrac{2}{n+1}$,

$3w_{n+1} + 2w_n = -\dfrac{5n+7}{(n+1)(n+2)} + \dfrac{3(n+1)}{(n+2)(n+1)} + \dfrac{2(n+2)}{(n+2)(n+1)}$,

$3w_{n+1} + 2w_n = -\dfrac{5n+7}{(n+1)(n+2)} + \dfrac{5n+7}{(n+1)(n+2)} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On déduit : $w_{n+1} = -\dfrac{2}{3} w_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

La suite (w_n) est géométrique, de raison $q = -\dfrac{2}{3}$.

Son premier terme est $w_0 = u_0 + \dfrac{1}{1} = 1$.

2/ Calculer w_n et u_n en fonction de n.

(w_n) géométrique $\Leftrightarrow w_n = w_0\, q^n$, soit : $w_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$.

$u_n = w_n - \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow u_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{1}{n+1}$.

3/ Déterminer les limites des suites (w_n) et (u_n).

$|\,q\,| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(w_n - \dfrac{1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n - \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0.$