Voici quelques années, France Télécom annonçait :

"Après 18 h, le téléphone est 30% moins cher, soit 30% de temps de communication en plus".

Le prix payé est égal au prix d'une unité de temps multiplié par le nombre d'unités (on ne tiendra pas compte de l'abonnement et autres frais annexes).

A l'aide d'un contre-exemple, démontrer que cette publicité était fausse et calculer la proportion de temps réellement gagné.

Soit $p = 0{,}09$ € l'ancien prix d'une unité de temps.

Soit $n = 1000$, le nombre d'unités consommées en un mois, à cet ancien tarif.

La dépense mensuelle était $S = n \times p = 1000 \times 0{,}09 = 90$ € .

Soit p' le nouveau prix en euros d'une unité de temps : $p' = p - \dfrac{30}{100} p = (1 - 0{,}3)\, p = 0{,}7\, p = 0{,}063$ € .

La dépense mensuelle ne changeant pas, le nouveau nombre possible d'unités, n' , vérifie : $S = n' \times p'$.

$n' = \dfrac{S}{p'} = \dfrac{90}{0{,}063} = 1428$ unités par défaut.

L'augmentation du temps de communication est de 428 unités pour 1000 , soit $\dfrac{428}{1000} \times 100 = 42{,}8$ % .

Preuve théorique :

Soit p l'ancien prix en euros d'une unité de temps.

Soit p' le nouveau prix en euros d'une unité de temps : $p' = p - \dfrac{30}{100} p = (1 - 0{,}3)\, p = 0{,}7\, p$.

Soit n le nombre d'unités consommées en un mois, à l'ancien tarif p .

La dépense mensuelle était $S = n \times p$.

On veut conserver la même dépense, pour un nombre n' supérieur d'unités, au nouveau tarif p' .

$S = n' \times p' = n' \times (0{,}7\, p) \Rightarrow n \times p = (0{,}7 \times n') \times p$, soit $0{,}7 \times n' = n$.

$n' = \dfrac{n}{0{,}7} = 1{,}428\, n$ par défaut.

$n' = (1 + 0{,}428)\, n = n + 0{,}428\, n = n + \dfrac{42{,}8}{100} n$.

Le gain en temps de communication est de 42,8 %.