Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + x + 3}}$

$f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, d'où : $f'(x) = \dfrac{(4x - 5)(x^2 + x + 3) - (2x + 1)(2x^2 - 5x + 1)}{(x^2 + x + 3)^2}$

Après développement et réduction du numérateur, on obtient : $f'(x) = \dfrac{7x^2 + 10x - 16}{(x^2 + x + 3)^2}$.

b) $\boldsymbol{g(x) = (x^2 + 2x + 3)^2(-2x + 1)}$

$U = u^2 \Rightarrow U' = 2u.u'$

$U(x) = (x^2 + 2x + 3)^2 \Rightarrow U'(x) = 2(x^2 + 2x + 3)(2x + 2) = 4(x + 1)(x^2 + 2x + 3)$.

$g = U.v \Rightarrow g' = U'.v + U.v'$, d'où : $g'(x) = 4(x + 1)(x^2 + 2x + 3)(-2x + 1) + (x^2 + 2x + 3)^2(-2)$.

$g'(x) = 2(x^2 + 2x + 3)[2(x + 1)(-2x + 1) - (x^2 + 2x + 3)] = 2(x^2 + 2x + 3)(-5x^2 - 4x - 1)$.

$g'(x) = -2(x^2 + 2x + 3)(5x^2 + 4x + 1)$.

Une autre méthode aurait consisté à complètement développer $g(x) = (x^2 + 2x + 3)^2(-2x + 1)$, pour ensuite le dériver.
L'inconvénient de cette méthode est qu'il est ensuite difficile de retrouver une *factorisation de la dérivée* , or la démarche à suivre pour rechercher les *extrema* de fonctions impose de factoriser au maximum la dérivée.

c) $\boldsymbol{h(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}}$

Pour tout p entier naturel : $(x^p)' = p.x^{p-1}$.

$h(x) = x^2 + x^{-2} \Rightarrow h'(x) = 2x^1 + (-2x^{-3}) = 2x - 2x^{-3} = 2x - \dfrac{2}{x^3} = 2\dfrac{x^4 - 1}{x^3} = \dfrac{2(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^3}$.

d) $\boldsymbol{k(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2}$

$k = u^2 \Rightarrow k' = 2u.u'$

$k(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 \Rightarrow k'(x) = 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(x + \dfrac{1}{x}\right)' = 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)(x + x^{-1})' = 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)(1 - x^{-2})$

$k'(x) = 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 2\,\dfrac{x^2 + 1}{x}\,.\,\dfrac{x^2 - 1}{x^2} = \dfrac{2(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^3}$.

Remarque : On constate que les fonctions h et k ont même dérivée. En voici l'explication.

$k(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x.\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 2 = h(x) + 2$.

Les fonctions h et k ne différant que d'une constante $C = 2$, elles ont même dérivée.