Une urne contient des boules noires et des boules blanches. Le nombre de boules noires est le triple de celui des boules blanches.

1/ On tire au hasard une boule de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire ?

Soit n le nombre de boules blanches et $3n$ celui des boules noires.

Soit A l'événement "obtenir une boule noire" .

$p(A) = \dfrac{\text{nbre cas favorables à } A}{\text{nbre de cas possibles}} = \dfrac{3n}{n+3n} = \dfrac{3n}{4n} = \dfrac{3}{4} = 0{,}750$.

2/ On tire à présent trois boules successivement avec remise et l'on compte le nombre de boules noires obtenues, soit un nombre entre 0 et 3 .

a) Indiquer la loi de probabilité associée à cette expérience.

Cette *suite* de $n = 3$ expériences identiques (remise des boules), a *deux aléas* (succès ou echec de sortie d'une boule noire), le succès étant de probabilité $p = 0{,}75$ dans chaque expérience, est appellé un *tirage de Bernouilli*, ou une *loi binômiale* $B(n\,;p)$, soit ici $B(3\,;0{,}75)$.

b) Quelle est l'espérance de cette loi ?

On peut savoir que la loi binômiale $B(n; p)$ admet pour *espérance mathématique* $E(X) = np$ et pour *écart-type* $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$ et $E(X) = np = 3 \times 0{,}75 = 2{,}25$ boules noires en moyenne pour 3 tirages successifs.

Preuve :

$X = 0 \Leftrightarrow$ le tirage (B,B,B) de probabilité $p_1 = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^3$ sans permutations : $n_1 = 1$ cas favorable.

$p(X = 0) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 = \dfrac{1}{64}$.

$X = 1 \Leftrightarrow$ le tirage (N,B,B) de probabilité $p_2 = \dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ admet 2 autres permutations équiprobables, (B,N,B) , (B,B,N) : $n_2 = 3$ cas favorables.

$p(X = 1) = 3 \times \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{64}$.

$X = 2 \Leftrightarrow$ le tirage (N,N,B) de probabilité $p_3 = \dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$ admet 2 autres permutations équiprobables, (B,N,B) , (B,B,N) : $n_3 = 3$ cas favorables.

$p(X = 2) = 3 \times \dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{27}{64}$.

$X = 3 \Leftrightarrow$ le tirage (N,N,N) de probabilité $p_1 = \dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3$ sans permutations : $n_4 = 1$ cas favorable.

$p(X = 3) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{27}{64}$.

On peut savoir que, pour tout $k \in [0\,;n]$, $p(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

$\dbinom{n}{k}$, aussi noté C_n^k , est le nombre de *combinaisons* k à k parmi n .

$E(X) = \sum_{k=1}^{4} p_k x_k = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 = 0.p_1 + 1.p_2 + 2.p_3 + 3.p_4 = \dfrac{9}{64} + \dfrac{54}{64} + \dfrac{81}{64} = \dfrac{144}{64} = \dfrac{9}{4} = 2{,}25$ comme prévu.