On estime que le nombre total de milliers de kilomètres que peut parcourir une voiture avant d'être mise à la ferraille est une variable aléatoire *exponentielle* X de *paramètre* $\lambda = \frac{1}{75}$.

Une voiture n'ayant parcouru que 10 000 km est à vendre.

1/ Quelle est la probabilité pour que cette voiture soit utilisable pendant encore au moins 40 000 km ?

Une variable aléatoire continue qui suit une loi *exponentielle* de paramètre λ, admet pour *densité de probabilité* :

$$\begin{cases} t < 0 \Rightarrow f(t) = 0 \\ t \geq 0 \Rightarrow f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \end{cases}.$$

Sa *fonction de répartition* est $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. $\begin{cases} x < 0 \Rightarrow F(x) = 0 \\ x \geq 0 \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \end{cases}$.

Pour tous réels a et b tels que $a \leq b$:

La probabilité d'obtenir $a \leq X \leq b$ est $p(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

$p(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt = F(a)$.

$p(X \geq b) = \int_{b}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 - \int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt = 1 - F(b)$.

Soit l'événement A : "La voiture a une durée de vie d'au moins 10 000 km" , soit $X \geq 10$.

Soit l'événement B : "La voiture a une durée de vie d'au moins 50 000 km" , soit $X \geq 50$.

On cherche la probabilité de l'évènement $C = {}_A B$, "B sachant A réalisé".

$p(A \cap B) = p(B)$ et $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$, soit $p_A(B) = \dfrac{p(B)}{p(A)}$.

$p(A) = p(X \geq 10) = 1 - F(10) = 1 - (1 - e^{-10\lambda}) = e^{-10\lambda} = e^{-10/75} = e^{-2/15}$.

$p(B) = p(X \geq 50) = 1 - F(50) = 1 - (1 - e^{-50\lambda}) = e^{-50\lambda} = e^{-50/75} = e^{-10/15}$.

$$p_A(B) = \frac{p(B)}{p(A)} = \frac{e^{-10/15}}{e^{-2/15}} = e^{-8/15} \approx 0{,}587$$ par excès, soit 58,7% de chances.

Remarque : Une loi *exponentielle* est dite *sans mémoire* :

La probabilité d'une durée de vie de 40 000 km au moins, ne dépend pas du fait que l'on ait précédemment parcouru 10 000 km ou non.

Soit l'événement D : "La voiture a une durée de vie d'au moins 40 000 km" , soit $X \geq 40$.

$p(D) = p(X \geq 40) = 1 - F(40) = 1 - (1 - e^{-40\lambda}) = e^{-40\lambda} = e^{-40/75} = e^{-8/15} = p_A(B)$.

2/ Reprendre la question en estimant que la durée de vie de la voiture, exprimée en milliers de km , suit une loi *uniforme* sur l'intervalle [0 ; 150] .

Une loi *uniforme* sur $[a\,;b]$ admet une *densité de probabilité* constante $f(t) = k$ sur cet intervalle.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 \Rightarrow \int_{a}^{b} f(t)\,dt = 1$, soit $k\int_{a}^{b} 1\,dt = 1 \Leftrightarrow k(b-a) = 1 \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{1}{b-a}$.

Donc : $k = \dfrac{1}{150}$ (unité : 1000 km) $\begin{cases} t < 0 \text{ ou } t > 150 \Rightarrow f(t) = 0 \\ 0 \leq t \leq 150 \Rightarrow f(t) = \dfrac{1}{150} \end{cases}$.

$$F(x) = p(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \Rightarrow F(x) = 0 \\ 0 \le x \le 150 \Rightarrow F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \dfrac{1}{150}x \\ x > 150 \Rightarrow F(x) = 1 \end{cases}.$$

$p(A) = p(X \ge 10) = 1 - F(10) = 1 - \dfrac{10}{150} = \dfrac{14}{15}$.

$p(B) = p(X \ge 50) = 1 - F(50) = 1 - \dfrac{50}{150} = \dfrac{2}{3}$.

$p_A(B) = \dfrac{p(B)}{p(A)} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{15}{14} = \dfrac{5}{7} \approx 0{,}714$ par défaut, soit 71,4% de chances.