

La durée de vie X , en heures, d'un système électronique suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{7.200}$.

Le fabricant, estimant la durée moyenne d'utilisation du matériel est de 8 heures par jour, 300 jours par an, a garanti le matériel pendant un an.

1/ Quelle est la probabilité pour que l'utilisateur ait recours à la garantie ?

Une variable aléatoire continue qui suit une loi *exponentielle* de paramètre λ , admet pour *densité de probabilité* :

$$\begin{cases} t < 0 \Rightarrow f(t) = 0 \\ t \geq 0 \Rightarrow f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \end{cases}$$

Sa *fonction de répartition* est $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. $\begin{cases} x < 0 \Rightarrow F(x) = 0 \\ x \geq 0 \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \end{cases}$.

Pour tous réels a et b tels que $a \leq b$, la probabilité d'obtenir $a \leq X \leq b$ est $p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt$.

Il y aura recours à la garantie si la durée effective de vie du matériel est inférieure à $8 \times 300 = 2.400$ heures.

$$p(X < 2400) = F(2400) = 1 - e^{-2400/7200} = 1 - e^{-1/3} \approx 0,283 \text{ par défaut, soit } 28,3\% \text{ de chances.}$$

2/ Quelle doit être la durée de la garantie pour que la probabilité d'un recours à la garantie soit inférieure à 0,2 ?

Soit b la durée de vie, en heures, cherchée :

$$p(X < b) < 0,2 \Leftrightarrow F(b) = 1 - e^{-b/7200} < 0,2 \Leftrightarrow e^{-b/7200} > 0,8 \Leftrightarrow -\frac{b}{7200} > \ln(0,8) \Leftrightarrow b < -7200 \ln(0,8),$$

soit $b < 1606$ heures, soit 200 jours d'utilisation moyenne de 8 heures.

300 jours = 1 an \Rightarrow 200 jours = 8 mois au maximum de garantie.