Soient x et y , strictement positifs, vérifiant $x + y = 1$.

Montrer qu'alors $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y}) \geq 9$, pour toute valeur de x ou y .

Préciser pour quelles valeurs de x et y la valeur 9 minimum de $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})$ est-elle atteinte ?

1ère méthode :

Sachant x et y strictement positifs : $x + y = 1$ impose $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$.

$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y}) \geq 9 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) \geq 9xy \Leftrightarrow xy + x + y + 1 \geq 9xy$,

$8xy - (x+y) - 1 \leq 0$, soit $8xy - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 4xy - 1 \leq 0$.

$y = 1 - x \Rightarrow 4x(1-x) - 1 \leq 0$, soit $4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 0$, ce qui est toujours vrai.

L'expression $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})$ est toujours supérieure ou égale à 9 , pour les x et y envisagés.

L'égalité $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y}) = 9$, qui minimise l'expression, est donc atteinte pour $(2x-1)^2 = 0$, soit $x = +\frac{1}{2}$.

$y = 1 - x = +\frac{1}{2}$, donc le minimum 9 est atteint pour $x = y = +\frac{1}{2}$.

2ème méthode :

Les rôles de x et y sont identiques (permutables), donc le minimum ne peut être atteint que pour des valeurs telles que $x = y = a$. D'où $x + y = 2a = 1 \Leftrightarrow a = x = y = \frac{1}{2}$.

Le minium vaut alors : $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y}) = (1+\frac{1}{a})^2 = (1+2)^2 = 9$.

Remarque : *Pour confirmer cette affirmation.*

Si le minimum est atteint pour un couple $(x\,;y)$ avec des valeurs de x et y différentes l'une de l'autre, par exemple $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, on constate aisément que l'expression serait encore inférieure pour $x = y = \frac{2}{3}$.