Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+1+\ln x}{x}$.

En étudiant les variations et le signe de $f'(x)$ et $f''(x)$, déduire les variations de f .

$$f(x) = \frac{x^2+1+\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+\frac{1}{x})x - 1(x^2+1+\ln x)}{x^2} = \frac{x^2-\ln x}{x^2} = 1 - \frac{\ln x}{x^2}\,.$$

$$f'(x) = 1 - \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow f''(x) = -\frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x.\ln x}{x^4} = \frac{2\ln x - 1}{x^3}\,.$$

$f''(x)$ est du signe de $2\ln x - 1$.

$0 < x < e^{1/2} \Leftrightarrow 2\ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x)$ décroissante .

$x = e^{1/2} \Leftrightarrow 2\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow f''(e^{1/2}) = 0 \Leftrightarrow f'$ admet un minimum égal à $f'(e^{1/2}) = 1 - \dfrac{1}{2e} \approx 0{,}816$.

$x > e^{1/2} \Leftrightarrow 2\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x)$ croissante.

On constate que $f'(x)$ admet un *minimum* positif, ce qui prouve : $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

Par ailleurs :

$\lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+1+\ln x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+1+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ (asymptote verticale $x = 0$)

En remarquant : $f(x) = x + \dfrac{1+\ln x}{x}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.