Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - x^2$.

1/ Etablir un tableau des valeurs de $f(x)$, pour x variant par pas de 0,5 sur l'intervalle [-2 ; +3] .

On remplace x par chacune des valeurs suivantes dans $f(x) = x - x^2$.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	-6	-3,75	-2	-0,75	0	0,25	0	-0,75	-2	-3,75	-6

Au vu des résultats, on peut conjecturer que f est *croissante* sur $]-\infty ; \frac{1}{2}]$ et *décroissante* sur $[\frac{1}{2} ; +\infty[$.

On remarquera la symétrie des résultats par rapport à $x = 0{,}5 = \frac{1}{2}$.

2-a) Vérifier que $f(x) = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$ (1) .

Sachant : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

$\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - (x^2 - x + \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - x^2 + x - \frac{1}{4} = x - x^2 = f(x)$.

b) En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

On étudiera séparément les intervalles $]-\infty ; \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2} ; +\infty[$.

On décompose $f(x)$ en fonctions de référence.

$a : x \rightarrow x - \frac{1}{2}$.

De coefficient directeur +1 , cette fonction affine est *croissante* de $]-\infty ; +\infty[$ sur $]-\infty ; +\infty[$.

$$\begin{cases} a \text{ croissante de }]-\infty , \frac{1}{2}] \text{ sur }]-\infty , 0] \\ a \text{ croissante de } [\frac{1}{2} , +\infty[\text{ sur } [0 , +\infty[\end{cases} .$$

$c : x \rightarrow x^2$.

$$\begin{cases} c \text{ est décroissante de }]-\infty , 0] \text{ sur } [0 , +\infty[\\ c \text{ croissante de } [0 , +\infty[\text{ sur } [0 , +\infty[\end{cases} .$$

$b : x \rightarrow \frac{1}{4} - x$.

De coefficient directeur -1 , cette fonction affine est *décroissante* de $[0 ; +\infty[$ sur $]-\infty ; 0]$.

b *décroissante* de $[0 , +\infty[$ sur $]-\infty , 0]$.

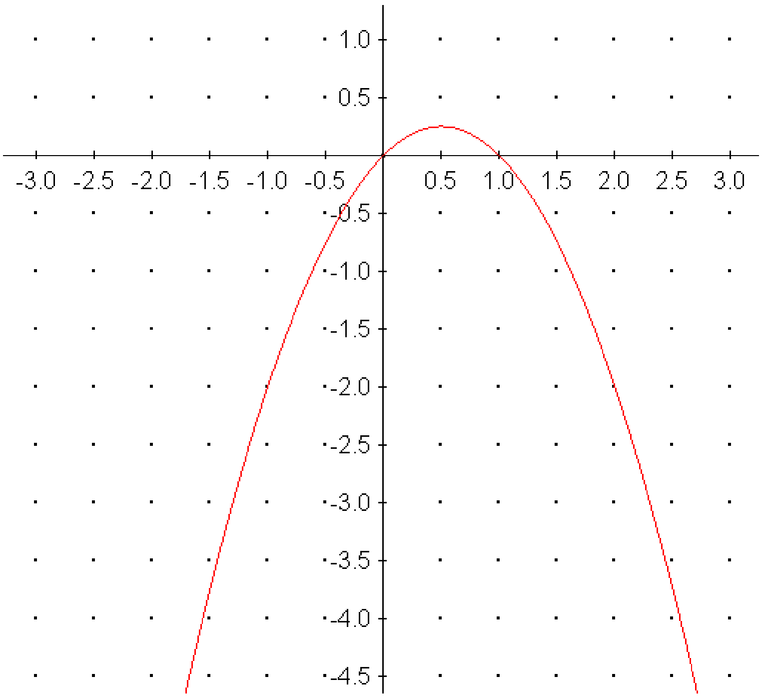
Tableau récapitulatif : Chaque fonction reprend les résultats de ceux de la ligne qui la précède.

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$a(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
$c(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
$b(x)$	$-\infty$	↗	$1/4$	↘	$-\infty$

Tableau de Variation

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1/4$	↘	$-\infty$

Graphe



3-a) Utiliser les résultats précédents pour montrer que $x - x^2 \leq \frac{1}{4}$, pour tout x réel.

On constate que la courbe représentative de la fonction f admet un *maximum* $y = \frac{1}{4}$ en $x = \frac{1}{2}$.

En conséquence, on conclue : $f(x) \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x - x^2 \leq \frac{1}{4}$, pour tout x réel.

b) Retrouver ce résultat à partir de la formule (1) .

$x - x^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 \geq 0$, ce qui est vrai pour tout x réel.