On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = e^{1-\frac{n}{2}}$.

1-a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique. En préciser le premier terme et la raison.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{1-\frac{n+1}{2}}}{e^{1-\frac{n}{2}}} = e^{\left(1-\frac{n+1}{2}\right)-\left(1-\frac{n}{2}\right)} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = q$$ rapport constant, pour tout n entier naturel.

La suite est bien géométrique.

$u_0 = e^1 = e$ et $q = \dfrac{1}{\sqrt{e}} = e^{-1/2} \approx 0{,}61$.

b) Justifier que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \ln u_n$ est arithmétique. Quelle est sa raison ?

Sachant : $\ln e^u = u$, on déduit : $v_n = \ln u_n = 1 - \dfrac{n}{2}$. D'où : $v_{n+1} - v_n = (1 - \dfrac{n+1}{2}) - (1 - \dfrac{n}{2}) = -\dfrac{1}{2}$.

La suite (v_n) est arithmétique, de premier terme $v_0 = \ln u_0 = \ln e = 1$, et de raison $r = -\dfrac{1}{2}$.

2/ On pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$.

a) Exprimer S_n et P_n en fonction de n .

La somme des $n + 1$ termes de la suite géométrique finie $(u_0 , u_1 , \ldots , u_n)$ de raison est : $S_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = e\,\frac{1-e^{-\frac{n+1}{2}}}{1-e^{-\frac{1}{2}}} .$$

Par ailleurs, $v_n = \ln u_n \Leftrightarrow u_n = e^{v_n}$, d'où :

$P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \ldots \times e^{v_n} = e^{v_0+v_1+\ldots+v_n}$.

La somme des $n + 1$ termes de la suite arithmétique $(v_0 , v_1 , \ldots , v_n)$ de raison r , est $s_n = \dfrac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$

$$s_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_0 + nr) = \frac{n+1}{2}(2v_0 + nr) = \frac{n+1}{2}\left(2 - \frac{n}{2}\right) = 1 + n - \frac{n(n+1)}{4} .$$

$$P_n = e^{s_n} = e^{1+n-\frac{n(n+1)}{4}} = e^{\frac{-n^2-3n+4}{4}} .$$

b) Déterminer le comportement à l'infini de S_n , puis celui de P_n .

$$|q| < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{, d'où : } \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_0}{1-q} = \frac{e}{1-e^{-\frac{1}{2}}} = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}-1} = \frac{e\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \approx 6{,}91 .$$

$r = -\dfrac{1}{2} < 0$, donc la suite arithmétique (v_n) tend vers $-\infty$, tout comme la somme s_n de ses termes.

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = e^{\lim_{n\to\infty} s_n} = e^{-\infty} = 0 .$$